Universidade de Lisboa

Relatório da Prática de Ensino Supervisionada

CONEXÕES NO ENSINO E APRENDIZAGEM DAS SUCESSÕES

Tamara Leuca

Mestrado em Ensino da Matemática

2010

Universidade de Lisboa

Relatório da Prática de Ensino Supervisionada

CONEXÕES NO ENSINO E APRENDIZAGEM DAS SUCESSÕES

Tamara Leuca

Orientador: Professora Doutora Leonor Santos

Co-orientador: Professora Doutora Suzana Nápoles

Mestrado em Ensino da Matemática

2010

Resumo

Este estudo pretende compreender o papel das conexões entre vários tópicos matemáticos na aprendizagem das sucessões, em particular o recurso a diversas representações matemáticas.

O estudo foi desenvolvido durante o 3.º período do ano lectivo 2009/2010, numa turma do 11.º Ano de Matemática A, do Curso de Ciências e Tecnologias. O conteúdo matemático leccionado refere-se ao tema das Sucessões Reais. Os participantes deste estudo são um grupo de quatro alunos, cujo aproveitamento à Matemática é bom e muito bom. Os dados foram recolhidos através da observação das aulas leccionadas, que incidiu em particular, sobre a realização por parte dos alunos das tarefas propostas, e de recolha documental, que incluiu as produções dos alunos, os seus cadernos diários, os trabalhos de casa e os registos efectuados no quadro interactivo durante as aulas.

Os resultados evidenciam que os alunos construíram conexões entre vários conceitos matemáticos e recorreram a diversas representações, nomeadamente à representação verbal, geométrica, gráfica e analítica. Os alunos apelaram mais vezes às representações numéricas e analíticas, no entanto, tentaram fazer uso de outras, em particular nos problemas com um grau mais elevado de complexidade. A escolha duma determinada representação dependeu do tipo de tarefa proposto, do modo como foi apresentada e do raciocínio de cada aluno. As principais dificuldades manifestadas foram na passagem para a representação analítica e na comunicação matemática.

Palavras-chave: Conexões, Representações, Sucessões.

Abstract

The aim of this study is to understand the role of connections among different topics of Mathematics in the learning of successions, namely the use of diverse mathematics representations.

This study was developed during the 3rd term of 2009/2010, in an 11th grade class of Mathematics A of the "Sciences and Technologies Course". The mathematical topic taught refers to Real Successions. The participants are a group of four students, with a good or very good mathematics achievement. The methods used to collect data were observation of the lessons taught, specially the tasks developed by the students and documentary collecting, namely the work done by the students, their notebooks, homework and written data on the interactive board during the lessons.

The results pointed out that the students built up connections among mathematical concepts, and used different representations, such as verbal, geometric, graphic and analytical ones. The students used more frequently numerical and analytical representations. However, they tried to use different kinds of representations, especially in problems with a higher level of complexity. The choice of a specific representation depended on the kind of problem proposed, the way it was presented, and the reasoning of each student. The main difficulties were observed in the translation to an analytical representation and in the mathematical communication.

Key words: Connections, Representations, Successions.

Índice

Capítulo 1 - Introdução **1**

Capítulo 2 – Conexões e Representações **5**

2.1.Conexões na educação matemática 5

2.2. O significado do conceito de representação matemática 9

2.3. A importância das representações nos programas de Matemática em Portugal 14

2.4. Conexões e representações matemáticas 16

Capítulo 3 – A práctica lectiva **21**

3.1. Importância das tarefas 21

3.2. A importância da planificação e da estrutura da aula 24

Capítulo 4 – Proposta Pedagógica **27**

4.1. Caracterização da turma 27

4.2. As sucessões nos programas de Matemática em Portugal 30

4.3. Estratégias de ensino concebidas para leccionar a subunidade Sucessões 38

4.4. Tarefas 40

4.5. Planificação 47

4.5. Descrição sumária das aulas realizadas 50

4.6. Métodos e Procedimentos de recolha de dados 65

Capítulo 5 – Análise de dados **69**

5.1. Análise da Tarefa1 69

5.2. Análise da Tarefa 2 76

5.3. Análise da Tarefa 3 84

5.4. Análise da Tarefa 4 89

5.5. Análise da Tarefa 6 (Ditado Matemático) 92

5.6. Análise da Tarefa 7 97

Capítulo 6 – Reflexão sobre o trabalho realizado **105**

6.1. Representações geométricas e gráficas 105

6.2. Abordagem analítica 106

6.3. Representações utilizadas pelos alunos 107

6.4. Dificuldades manifestadas 108

Referências **113**

Bibliografia consultada **116**

Anexos **117**

Anexo 1 118

Anexo 2 122

Anexo 3 126

Anexo 4 129

Anexo 5 133

Anexo 6 134

Anexo 7 142

Anexo 8 146

Anexo 9 150

Anexo 10 154

Anexo 11 158

Anexo 12 162

Anexo 13 165

Anexo 14 168

Anexo 15 170

Anexo 16 172

Capítulo 1

Introdução

O tema central do presente relatório é de natureza curricular: conexões no ensino e aprendizagem da Matemática. Este tema poderá ser trabalhado em qualquer tópico do Programa de Matemática do Ensino Básico e Secundário, uma vez que se trata de uma capacidade transversal a desenvolver ao longo de toda a escolaridade.

O presente relatório diz respeito ao estudo desenvolvido durante o 3º período do ano lectivo 2009/2010 numa turma do 11.º Ano, da Escola Secundária Vergílio Ferreira. O conteúdo matemático Sucessões Reais, foi leccionado durante 6 blocos de 90 minutos nesta mesma turma.

A unidade seleccionada para leccionar faz parte do Programa de Matemática do 11.º Ano (Silva, Fonseca, Martins, Fonseca & Lopes, 2002b) e é parte componente do Tema III- Sucessões Reais. O tema está dividido em dois tópicos: Sucessões e Limites. Os objectivos específicos do tópico Sucessões, são seguintes:

- Definir sucessão de números reais;
- Utilizar várias formas de representar sucessões;
- Estudar a monotonia e limitação de uma sucessão.

Um dos motivos para desenvolver o meu estudo baseou-se nas orientações curriculares. Conforme as indicações metodológicas do programa, "(…) O estudo das sucessões pode e deve servir para evidenciar conexões entre a matemática e outras disciplinas: a introdução do conceito de sucessão e das suas propriedades pode ser feita propondo vários problemas" (Silva *et al*, 2002b, p. 8).

Nesta unidade atribui-se uma grande importância à resolução de problemas que permitem chegar ao conceito de sucessão, às suas propriedades e à necessidade de elaborar representações formalizadas. A utilização da calculadora nesta unidade curricular pode permitir aos alunos responder aos problemas propostos e procurar formas para modelação das situações. Para tal, o professor deve explorar o uso da calculadora (Silva *et al.*, 2002b).

A comunicação matemática nesta unidade curricular, pode continuar a ser desenvolvida através de "(…) exercícios de comunicação (pela fala e pela composição escrita)" (Silva *et al*, 2002b, p. 8).

Outro motivo para proceder ao estudo, baseou-se nas minhas recordações enquanto aluna e enquanto professora no meu país de origem, que estão ligadas à ideia de que a Matemática é uma ciência compartimentada. Lembro-me perfeitamente que a Geometria se estudava separadamente da Álgebra, não havendo ligação entre estes temas. Hoje, para um aluno do séc. XXI, o mundo é muito mais complexo, com mudanças contínuas e dispondo de tecnologias avançadas. Devido a tal facto, o programa de Matemática do Ensino Secundário atribui grande importância às conexões entre diversos temas, de modo a permitir aos alunos explorar, conjecturar e descobrir processos de resolução de problemas e diversificar actividades. O professor de matemática deve, assim, construir tarefas de forma a tornar visíveis as conexões entre vários temas e desenvolver nos alunos a capacidade de as usar. As conexões não se trabalham em separado, mas ao longo dos temas, criando contextos que favorecem a aprendizagem do que é novo a partir do que o aluno sabe. Quem deve criar estes contextos é o professor em conformidade com as características dos alunos que tem. Falando em conexões na aprendizagem das sucessões reais, não se pode ignorar a importância das várias representações das sucessões. A interligação entre várias representações, as estratégias elaboradas pelos alunos na passagem duma representação para a outra na procura de solução é muito importante no estudo das sucessões. Nos vários documentos curriculares incluindo os *Princípios e normas para o ensino e aprendizagem da matemática* (NCTM, 2008), evidencia-se a importância das conexões e das representações no estudo dos vários tópicos da disciplina. No entanto, havendo pouca investigação em Portugal sobre estes temas tão relevantes, encontramos poucas referências em português. Sobre o papel das conexões no estudo das sucessões reais alguns autores portugueses revelam algumas experiências realizadas durante as próprias práticas lectivas. A curiosidade de perceber como os alunos conseguem estabelecer conexões não só entre vários tópicos matemáticos, mas também entre várias representações, e como conseguem passar de uma representação para a outra para apreender novos conceitos e tendo em consideração a pouca informação existente nesta área, foram outras razões que me levaram a desenvolver este estudo.

O tema das sucessões reais ocupa uma grande parte da matéria da Matemática do 11.º ano. No início do estudo das sucessões, parte que foi leccionada por mim, pode-se eventualmente observar as estratégias elaboradas pelos alunos com base na construção de conexões entre os tópicos estudados neste ano de escolaridade e também entre as representações gráficas, geométricas e analíticas. As conexões são muito evidentes no estudo das sucessões. Sendo uma sucessão, uma função de variável natural, para uma melhor compreensão dos conceitos de majorantes e minorantes e das sucessões monótonas limitadas, a conexão com as funções de variável real e em particular com as assímptotas, é indispensável. Também, a associação das sucessões aos números pitagóricos e aos casos estudados em anos anteriores, como a sucessão do Fibonacci entre outras, contribuem para o estabelecimento de conexões.

O tema das sucessões é um tema que permite a elaboração de várias estratégias por parte dos alunos para definir uma sucessão. Ao optar por uma ou outra estratégia, os alunos constroem espontaneamente conexões que os ajudam a entender melhor as propriedades duma dada sucessão. As várias estratégias podem originar a construção de novas conexões que ajudarão no estudo de conceitos mais aprofundados ligados às sucessões.

Atendendo ao exposto, optei por estudar o papel das conexões entre vários tópicos da Matemática na aprendizagem das sucessões, procurando dar resposta às seguintes questões:

(1) De que forma o recurso às representações geométricas e gráficas contribui para a aprendizagem de conceitos ligados às sucessões?

(2) De que forma a abordagem analítica contribui para a aprendizagem de conceitos ligados às sucessões?

(3) Qual o tipo de representações que é mais utilizado pelos alunos na resolução de tarefas sobre sucessões?

(4) Quais as principais dificuldades manifestadas pelos alunos face às tarefas propostas? De que modos as procuram ultrapassar?

Procurando respostas para as questões acima referidas, acredito que este estudo contribuirá para o meu desenvolvimento profissional. As respostas obtidas para as questões da problemática do estudo, vão permitir, a mim e aos meus colegas, que se deparam com esta problemática, perceber melhor as etapas percorridas na construção das conexões pelos alunos no estudo das sucessões reais. Espero que o presente relatório sirva como ponto de partida para o estudo das conexões na aprendizagem das sucessões numa etapa mais avançada, como por exemplo no estudo das progressões aritméticas e geométricas e dos limites de sucessões.

Capítulo 2

Conexões e Representações

Neste capítulo apresento as perspectivas teóricas de alguns autores sobre as conexões e as representações no ensino – aprendizagem da Matemática. Evidencio também a importância das conexões e das representações no ensino - aprendizagem das sucessões, com destaque nas orientações curriculares e nos estudos de alguns investigadores.

2.1.Conexões na educação matemática

O termo "conexão" tem várias interpretações assim como relação, vinculo, ligação, aplicação, modelação, concordância (*Dicionário da Língua Portuguesa*, 2009). O matemático Hung-Hsi Wu, professor na Universidade da Califórnia em Berkeley, quando se refere às conexões usa outras designações como coerência e interligação, salientando que para captar a essência da Matemática são necessárias cinco características, sendo uma delas a coerência. Explicita, dizendo que "(…) a Matemática é uma tapeçaria na qual os conceitos e as capacidades se interligam, formando um todo (…)" (Wu, 2008, p. 5).

Vários investigadores falam da importância das conexões como um tema indispensável do currículo escolar. Mwakapenda (2008), ao analisar o novo currículo da matemática da África de Sul, destaca a natureza e a importância das conexões no ensino e aprendizagem da matemática actual. Segundo este autor existem dois tipos de conexões. O primeiro tipo de conexões é entre a álgebra e as funções, evidenciando a álgebra como uma ferramenta para trabalhar funções. O segundo tipo revela-se no estudo da álgebra e das funções entre as quatro representações definidas pelo autor: numérica, gráfica, verbal e simbólica. As conexões entre as quatro representações acima referidas possibilitam uma melhor compreensão da álgebra e das funções. Porém, para enriquecer a actividade matemática, os estudantes devem estabelecer conexões não só entre os conceitos matemáticos mas também entre a matemática e outras ciências, e entre a matemática e o contexto real. A integração dos conceitos e processos dentro da matemática significa estabelecer conexões. O autor finaliza com a ideia de que os alunos devem estabelecer conexões e produzir representações, integrando-as dentro da matemática e nas várias disciplinas.

Conforme Afonso e Nunes (2005a), na Matemática dever-se-iam estabelecer ligações entre os aspectos conceptual e processual, entre diversos tópicos do programa a considerar, entre a Matemática e outras áreas do currículo e entre a Matemática e diversos aspectos da vida quotidiana dos alunos. No mesmo sentido o NCTM (2008, p. 73), salienta que "Se a compreensão conceptual estiver relacionada com os procedimentos, os alunos não considerarão a matemática como um conjunto arbitrário de regras. Esta integração de procedimentos e conceitos deverá constituir um aspecto primordial da matemática escolar".

O tema das conexões matemáticas é uma parte componente das normas (NCTM, 2008) para o Ensino Básico e Secundário. A importância das conexões no ensino - aprendizagem da Matemática é fundamentada na ideia de que "Através de um ensino que enfatize a inter-relação das diversas ideias matemáticas, os alunos não só aprendem matemática, como também aprendem a reconhecer a utilidade da matemática" (NCTM, 2008, p. 71). As conexões são construídas através das suas aprendizagens anteriores. Ao estabelecerem conexões no processo de resolução de problemas, os alunos podem perceber melhor a utilidade da matemática e olhar a disciplina de forma positiva. Segundo as normas (NCTM, 2008), os alunos devem:

- Reconhecer e usar conexões entre ideias matemáticas;
- Compreender a forma como as ideias matemáticas se inter-relacionam e se constroem umas a partir das outras para produzir um todo coerente;
- Reconhecer e aplicar a matemática em contextos exteriores a ela própria (p. 71).

Afonso (2008) considera que a Matemática tem um interesse e uma utilidade múltipla para o aluno. O estabelecimento de conexões permite-lhe ver esta disciplina como uma área dialogante, que desperta a vontade de fazer novas perguntas, de as querer testar e investigar.

A implementação do novo programa do ensino básico (Ponte *et al.*, 2007) em Portugal dá oportunidades para os alunos ganharem gosto pela disciplina, desenvolverem a capacidade de a usar e de a apreciar. As conexões são consideradas neste programa como um tema transversal a todos os ciclos. Destaca-se, entre os nove objectivos gerais do ensino da Matemática, o que refere o estabelecimento de conexões:

- Os alunos devem ser capazes de estabelecer conexões entre diferentes conceitos e relações

> matemáticas e também entre estes e situações não matemáticas, isto é, devem ser capazes de
> - Identificar e usar conexões entre ideias matemáticas;
> - Compreender como as ideias matemáticas se inter-relacionam, constituindo um todo;
> - Reconhecer e aplicar ideias matemáticas em contextos não matemáticos, construindo modelos matemáticos simples (Ponte *et al*., 2007, p. 6).

Nas orientações metodológicas do mesmo programa, pode ler-se que "Os alunos têm de compreender como os conhecimentos matemáticos se relacionam entre si, ser capazes de usar a linguagem numérica e algébrica na resolução de problemas geométricos, nos mais diversos contextos" (Ponte *et al*., 2007, p. 9). No capítulo das capacidades transversais do 3º ciclo, uma das abordagens previstas na resolução de problemas refere que se deve "explorar conexões matemáticas para obter múltiplas perspectivas de um problema", enquanto no tópico da comunicação matemática, se evidencia a ideia das conexões entre várias representações. Deste modo, os alunos devem "recorrer a vários tipos de representações (gráfica, algébrica e tabular) e estabelecer conexões entre elas para obter múltiplas perspectivas de um problema e das suas soluções" (Ponte *et al*., 2007, p. 64).

O professor deverá proporcionar aos alunos experiências, envolvendo-os em actividades que proporcionem estabelecimento de conexões. A resolução de problemas interessantes desempenha um papel essencial na aprendizagem dos conteúdos matemáticos e ajuda os alunos a estabelecer conexões entre os conteúdos das diversas áreas. Como promotor de conhecimentos, o professor deverá seleccionar "(…) problemas ou situações que possuam pistas que sugiram a existência de tais ligações" (NCTM, 2008, p. 421). A resolução de problemas é uma actividade que promove bons momentos de aprendizagem na construção de conexões: "Problemas ricos, um ambiente que apoie o pensamento matemático, e o acesso a ferramentas matemáticas contribuem para que os alunos observem as conexões." (NCTM, 2008, p. 421). Este tipo de actividades motiva e desperta a atenção do aluno para ver "(…) a matemática enquanto disciplina com sentido, em vez de uma disciplina composta por regras para exercícios, dadas pelo professor, para serem memorizadas e usadas pelos alunos" (NCTM, 2008, p. 394). Além da resolução de problemas, a predisposição de reconhecer as conexões e as usar na resolução de problemas, pode ser alimentada através de questões orientadoras que o professor coloca. Estas questões devem dar origem a discussões ricas, de modo a levar os alunos a uma compreensão mais profunda dos conteúdos matemáticos. "É necessário que os alunos se tornem explicitamente conscientes da existência de conexões matemáticas" (NCTM, 2008, p. 71). A comunicação na sala de aula é outro aspecto importante para o estabelecimento de conexões. Conforme Ponte, Boavida, Graça e Abrantes (1997):

> O professor deve garantir que essa comunicação se efectua nos dois sentidos – dele para os alunos e dos alunos para si. O professor deve ainda valorizar a comunicação entre os próprios alunos, estabelecendo, para isso, as regras adequadas (p. 87).

Atendendo ao exposto, os alunos vão desenvolver uma visão da matemática como um todo integrado e interligado e terão uma menor tendência para considerar os procedimentos e os conceitos matemáticos isoladamente. À medida que os alunos se apercebem das conexões construídas, poderão começar a reconhecer a importância da abstracção da matemática (NCTM, 2008).

Como tema transversal e uma das normas básicas para o ensino e aprendizagem da Matemática, as conexões são indispensáveis no estudo das sucessões.

Uma componente poderosa da Matemática para estabelecer conexões, reside na descoberta de padrões. Como tal, " (…) vários investigadores referem que o que os matemáticos fazem melhor é descobrir e revelar padrões escondidos, sendo o próprio objectivo da matemática, em certa medida, descobrir a regularidade onde parece vingar o caos, extrair a estrutura e a invariância da desordem e da confusão" (Vale & Pimentel, 2005, p. 14).

A análise do novo programa (Ponte *et al*., 2007) permite observar que desde o 1º ciclo os alunos "podem também observar padrões de pontos e representá-los tanto geométrica como numericamente, fazendo conexões entre a geometria e aritmética". A construção das conexões para solucionar problemas relacionadas com regularidades, "ajuda a desenvolver a capacidade de abstracção e contribui para o desenvolvimento do pensamento algébrico". Nas orientações metodológicas do programa para o ensino secundário (Silva, Fonseca, Martins, Fonseca & Lopes, 2002a, p. 20), pode-se ler: "Sempre que possível, o professor deve evidenciar aplicações da Matemática e deve estabelecer conexões entre os diversos temas matemáticos do currículo e com outras ciências". Deve também "ser discutido com os estudantes o processo de modelação matemática e a sua importância no mundo actual".

O tema das Sucessões Reais trabalhado no 11.º ano é um tema onde se podem explorar problemas que envolvem padrões. Resolução de problemas que exigem procura de padrões é uma actividade importante na construção de conexões matemáticas. Assim, considera-se que as tarefas que envolvem a procura de padrões permitem

> - contribuir para a construção de uma imagem mais positiva da matemática por parte dos alunos;
> - experienciar o poder e a utilidade da matemática e desenvolver o conhecimento sobre novos conceitos;
> - evidenciar como os diferentes conhecimentos matemáticos se relacionam entre si e com outras áreas do currículo;
> - promover o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos tornando-os bons solucionadores de problemas e pensadores abstractos;
> - melhorar a compreensão do sentido do número, da álgebra e de conceitos geométricos (Vale & Pimentel, 2005, p. 16).

Em síntese, analisando a opinião de alguns autores e as orientações curriculares, pode concluir-se que as conexões são fundamentais na resolução de problemas, situam-se no cerne da comunicação matemática na sala de aula, sendo estas estabelecidas entre diversos conceitos matemáticos, entre matemática e outras disciplinas, entre a matemática e o quotidiano de cada aluno. As conexões estabelecidas na resolução de problemas que envolvem regularidades são importantes para desenvolver a capacidade de abstracção e desenvolver o raciocínio. Mas as conexões podem ser construídas, entre várias representações que os alunos apresentam. Como tal, o elo entre as conexões e as representações é indispensável.

2.2. O significado do conceito de representação matemática

O termo "representação" tem várias interpretações. Pode dizer-se que a representação é uma imagem, desenho que represente alguém ou é uma figuração mental (*Dicionário da Língua Portuguesa*, 2009). Em filosofia, uma representação é uma entidade que está por outra entidade. Assim, a representação é uma relação entre o representante e o representado (Wikipedia, *Representação (filosofia)*). "Uma representação matemática pode ser qualquer representação semiótica que represente um objecto matemático. Por exemplo, o objecto matemático número pode ser representado simioticamente pelos racionais, inteiros, fraccionários, etc." (Wikipedia, *Representação (matemática)*).

Segundo NCTM (2008), "o termo representação refere-se tanto ao processo como ao resultado – por outras palavras, à aquisição de um conceito ou de uma relação matemática expressa numa determinada forma e à forma, em si mesma" (p. 75).

Vários autores exprimem as suas opiniões sobre a importância das representações.

Bruner (1975), referindo-se à estrutura e forma do conhecimento, afirma que todo o domínio de conhecimento ou qualquer problema dentro desse domínio pode ser representado sob três formas. Uma das três formas é a *representação activa*, ou seja a representação por um conjunto de acções apropriadas para obter um determinado resultado. Outra forma é definida por um conjunto de imagens resumidas ou gráficos, que representam conceitos não definidos completamente, designada por *representação icónica*. Por último, a forma que assente num conjunto de proposições lógicas ou simbólicas "derivado de um sistema simbólico regido por normas ou leis para formar ou transformar proposições" é designada por *representação simbólica*. O processo normal do desenvolvimento intelectual passa da representação activa do mundo para a icónica, finalizando com a representação simbólica.

Com auxílio de uma notação simbólica, o aluno chega à compreensão das propriedades formais ou abstractas dos conceitos com que lida. O aluno continua a basear-se na colecção das imagens que construiu, antes de apresentar as propriedades formais ou abstractas do objecto matemático. É essa colecção de imagens que lhe permitirá trabalhar ao nível da heurística, através de meios menos rigorosos para explorar problemas e construir conexões com outros problemas já resolvidos. Contudo, pode acontecer que um aluno, tendo um sistema simbólico bem desenvolvido, pode saltar os dois primeiros estágios. Aqui há um risco de as transformações simbólicas não conseguirem levar o aluno à solução do problema, devido à falta de imagens necessárias para retroceder. A exploração de alternativas é afectada pela sequência em que a matéria a ser estudada é apresentada ao aluno. A sequência não é única para todos os alunos. Assim, o professor deve decidir qual é a melhor altura para encorajar os alunos a concentrar-se numa hipótese ou dedicar-se a explorar alternativas. É necessário também ter em conta que qualquer regime de correcção arrisca a tornar o aluno permanentemente dependente da correcção do professor. Devido a esse facto, o professor deverá corrigir o aluno de tal modo que futuramente o aluno adopte ele próprio a "função correctiva". Segundo NCTM (2008, p. 425), o papel do professor "(…) consiste em ajudar os alunos a associar as suas imagens pessoais a representações mais convencionais. As representações geradas pelos alunos constituem uma janela muito útil para observar o pensamento dos alunos”.

Diferentes formas de representações e as conexões entre elas revelam uma importância significativa, por exemplo, no estudo das sucessões. Uma representação analítica duma sucessão pode tornar pouco claro o comportamento dos termos da sucessão e a sua representação gráfica, pode contribuir para a compreensão do seu comportamento. Um exemplo que ilustre uma destas situações é a sucessão cujo termo geral é $\boldsymbol{a_n = (n - 100)^2}$. Por processos analíticos é possível demonstrar que a respectiva sucessão é não monótona, mas o cálculo algébrico de alguns dos seus termos pode levar a concluir que a sucessão é monótona decrescente. No entanto, através da sua representação gráfica, seria fácil de verificar que a respectiva sucessão a partir do termo de ordem $\boldsymbol{n = 101}$, começa a crescer, concluindo-se então que a sucessão$(\boldsymbol{a_n})$ não é monótona.

Tendo a capacidade de representar uma sucessão de várias formas e estabelecer conexão entre elas, um aluno pode ter maior sucesso na resolução de problemas que envolvem sucessões. Para além disso, qualquer sucessão representada por números, geometricamente (por figuras) ou graficamente pode originar diferentes representações algébricas do seu termo geral, ou ser representada por recorrência. Por exemplo, analisando a sucessão $(\boldsymbol{b_n})$ representada numericamente por **1, -1, 1, -1, 1, …** e supondo que a lei de formação se mantém, pode-se chegar às várias expressões analíticas para o termo geral. Eis algumas expressões analíticas dessa sucessão: $\boldsymbol{b_n = (-1)^{n+1}}$; $\boldsymbol{b_n = (-1)^{n-1}}$; $\boldsymbol{b_n = \sin\left[(2n-1)\frac{\pi}{2}\right]}$ **;**

$$\boldsymbol{b_n = \cos[(n-1)\pi]} \text{ ou } \boldsymbol{b_n} = \begin{cases} \mathbf{1}, se\ \boldsymbol{n - impar} \\ \mathbf{-1}, se\ \boldsymbol{n - par} \end{cases}$$

Considere-se por exemplo a sucessão **(c_n)** do número de regiões em que fica dividido um círculo dependendo do número de diâmetros traçados.

Esta sucessão pode ser representada analiticamente por $\boldsymbol{c_n = 2n}$. Além disso poderia ser representada graficamente no referencial cartesiano, geometricamente através de círculos ou utilizando representação numérica (Figuras 1, 2, 3).

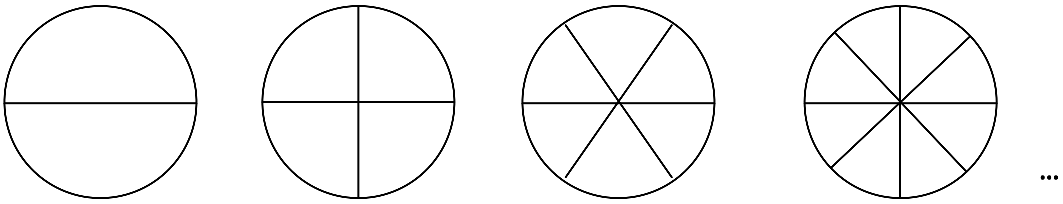
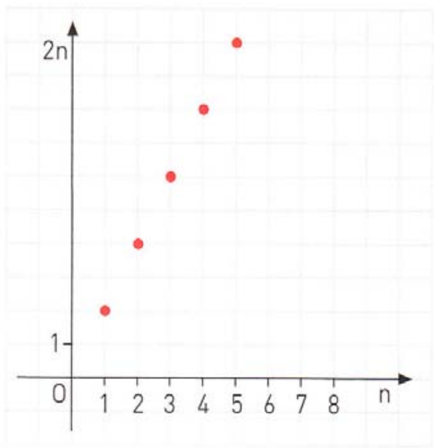


Figura 1 – Representação geométrica.

2, 4, 6, 8, …

Figura 2 – Representação numérica.



$$c_n = 2n$$

Figura 3 – Representação gráfica.

Apresento um exemplo de uma situação problemática que foi proposta numa turma do 5.º ano na escola Romena de Sábado onde estou a leccionar e que ilustra a exploração de conexões entre vários tipos de representações.

A situação problemática foi a seguinte: "Quatro amigos encontraram-se, quantos apertos de mãos deram? Explora a mesma situação para o caso de cinco amigos". Como não foi pedido aos alunos para descobrirem uma regularidade para qualquer número de amigos, resolveram esta situação utilizando as seguintes representações: 1) resolução recorrendo a um esquema; 2) resolução recorrendo a letras; 3) resolução recorrendo a um desenho que ilustra a situação (Figura 1 e 2). Conforme a teoria de Bruner (1975) sobre a construção do conhecimento, todas estas representações correspondem à representação icónica.

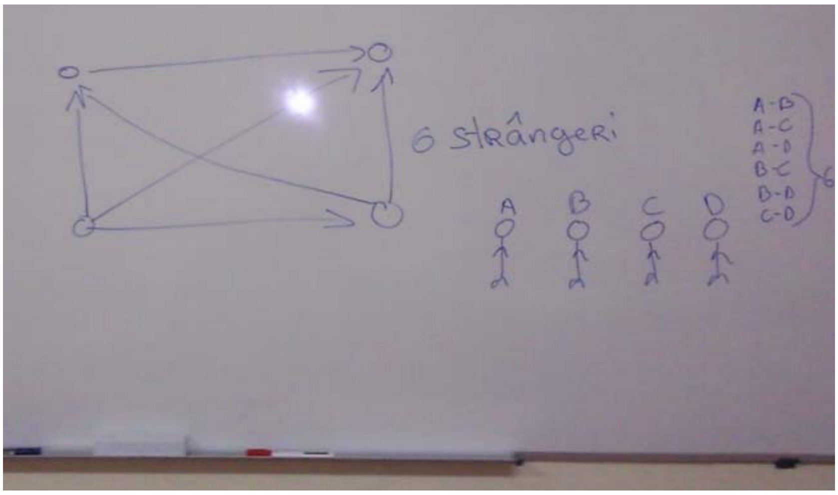


Figura 1- Resoluções para o caso de 4 amigos.

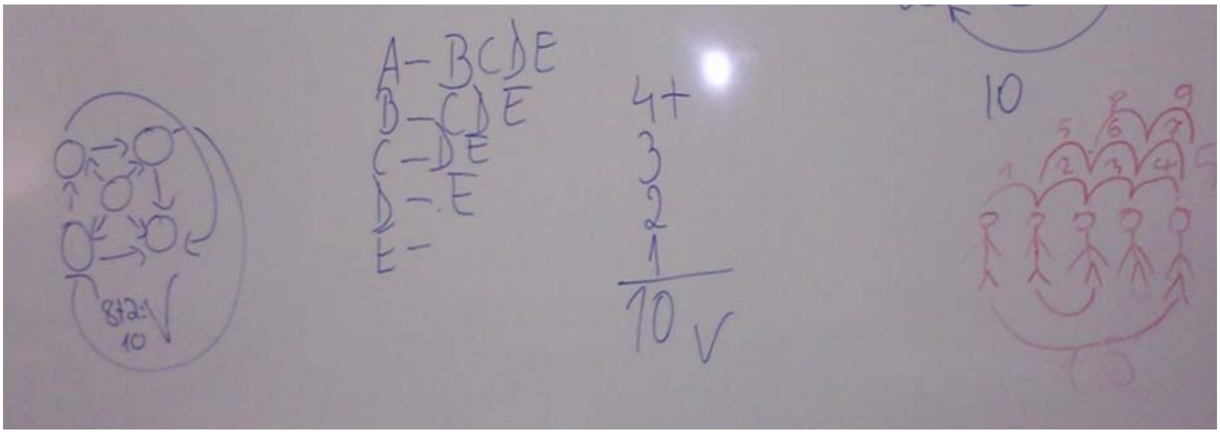


Figura 2- Resoluções para o caso de 5 amigos.

A Figura 1 mostra como o aluno que resolveu a situação passou do desenho para representação simbólica para concluir o número de apertos de mãos. Na Figura 2 pode observar-se a conexão construída pelos alunos entre o esquema e expressão numérica, entre a representação por símbolos e a expressão numérica. Um dos alunos que utilizou o desenho para ilustrar a situação, perdeu-se no seu raciocínio e acabou por não conseguir resolver a situação. Escreveu a resposta correcta, não conseguindo pelo seu esquema justificar a resposta. Na aula a seguir, explicou-me verbalmente o seu raciocínio que foi ilustrado, com alguns erros, no quadro por meio de uma representação icónica. Explicou o seguinte: “ Primeiro apertou as mãos com todos e saiu (4 apertos). O segundo amigo apertou com todos e saiu (3 apertos). O terceiro apertou com todos que restaram e saiu (2 apertos). O segundo apertou com o último e acabou (1 aperto). Então a resposta é 4+3+2+1=10”. Este aluno não conseguiu na primeira vez explicar o seu raciocínio utilizando a representação por desenho. Na segunda tentativa utilizando a representação verbal em conexão com o seu desenho, conseguiu explicar e corrigir o seu erro.

Atendendo ao exposto, vimos que uma simples situação problemática permite aos alunos explorar conexões entre as representações correspondentes ao nível do 5.º ano. Face à complexidade de utilização das representações que os alunos do secundário podem desenvolver, este tipo de situações poder-se-ia explorar para construção dum conjunto vasto de conexões matemáticas, no estudo das sucessões.

2.3. A importância das representações nos programas de Matemática em Portugal

O novo Programa de Matemática (Ponte *et al*., 2007), atribui às representações uma importância significativa. A importância das representações revela-se num dos nove objectivos gerais do ensino da Matemática que salienta que “Os alunos devem ser capazes de lidar com ideias matemáticas em diversas representações (…)” (p. 4) . Os mesmos devem “ler e interpretar representações simbólicas, pictóricas, tabelas e gráficos, e apresentar adequadamente informação em qualquer destas formas de representação” (p. 5). O trabalho com conceitos matemáticos deve envolver mais do que uma forma de representação. Por isso, os alunos devem adquirir hábitos de lidar com diversos tipos de representação matemática. Para além disso, os alunos têm de compreender que existe uma variedade de representações matemáticas e a capacidade de passar duma forma para outra é muito importante para uma melhor compreensão das ideias matemáticas. Sentindo a necessidade de desenvolver as suas próprias representações não convencionais, os alunos podem chegar à representação mais adequada para uma dada situação problemática. Cabe ao professor encarar estas representações e incentivar os alunos para desenvolverem outras representações convencionais que solucionam melhor a situação problemática em causa.

Conforme Silva *et al*. (2002a), a aprendizagem da matemática dos estudantes passa por fases intuitivas e informais. Os conceitos fundamentais e as suas propriedades básicas devem ser trabalhados de tal forma que os alunos possam chegar naturalmente a formalizações matemáticas precisas e à escrita simbólica. No estudo das sucessões, através de resolução de problemas, os alunos podem aceder às propriedades das sucessões elaborando representações formalizadas. A utilização da calculadora permite aos estudantes procurar formas próprias de organização para a modelação das situações. "O professor deve explorar o uso da calculadora e ajudar a construir tabelas, a desenhar e a interpretar gráficos. Só depois de serem experimentadas variadas redacções, são introduzidas as redacções simbólicas consagradas" (Silva *et al*., 2002b, p. 8).

Segundo NCTM (2008), os alunos devem desenvolver ao longo de todos os ciclos, habilidade de:

- Criar e usar representações para organizar, registar e comunicar ideias matemáticas;
- Seleccionar, aplicar e traduzir representações matemáticas para resolver problemas;
- Usar as representações para modelar e interpretar fenómenos físicos, sociais e matemáticos (p. 422).

Do 9.º ao 12.º ano, a complexidade da utilização de representações, por parte dos alunos, deverá ser ampliada. Passando do ensino básico para o secundário, os alunos já são preparados para usar várias representações matemáticas e usá-las de forma produtiva. A selecção da informação necessária entre as representações elaboradas é importante para alcançar os objectivos propostos. A representação gráfica de uma função, por exemplo, transmite alguma informação visual, mas a representação analítica pode fornecer uma caracterização mais elaborada, uma maior facilidade de manipular, analisar e transformar. Facilitadoras do raciocínio, as representações são usadas para validar resoluções alternativas. As diferentes representações sustentam várias formas de pensar e manipular os objectos matemáticos auxiliando a compreensão dos conceitos matemáticos. Utilizando várias representações dum conceito matemático, os alunos desenvolvem a capacidade de reconhecer estruturas matemáticas comuns em diferentes contextos. Novas formas de representações, associadas às tecnologias, vieram criar uma necessidade ainda maior de enfatizar a representação no ensino. O uso da calculadora, a utilização da técnica computacional no ensino secundário exige dos alunos que aprendam a introduzir e interpretar os dados no formato do respectivo meio técnico que estão a utilizar. As ferramentas informáticas incluem ícones e símbolos com significados específicos, como tal os alunos deverão aprender estas representações e distingui-las dos objectos matemáticos que estão a manipular. Como elementos essenciais no apoio à compreensão, as representações deverão ser utilizadas na construção de conexões entre os conceitos matemáticos inter-relacionados, na aplicação da matemática à problemas realistas, através da modelação (NCTM, 2008).

2.4. Conexões e representações matemáticas

Na sequência do exposto, verificou-se que existe uma forte ligação entre as conexões e as representações matemáticas. Segundo Mwakapenda (2008), as conexões são o cerne da matemática, sendo as noções da representação e integração aspectos chave das conexões. A construção do conhecimento matemático é feita através do estabelecimento de conexões entre as representações descritivas, numéricas e simbólicas que podem conduzir às relações abstractas. Os estudantes devem desenvolver habilidade de trabalhar quatro representações na actividade matemática: numérica, gráfica, verbal e simbólica. A conexão entre estas quatro representações é benéfica no estudo da álgebra e das funções, sem esquecer que existe conexão entre a álgebra e as funções. O currículo da África de Sul exige dos professores e dos alunos construir conexões, produzir representações e trabalhá-las de modo integrado dentro da matemática e entre a matemática e as disciplinas do currículo. Schultz (2000), refere-se a múltiplas representações. Entre estas, enumeram-se a representação verbal, por tabela, por gráfico, algébrica e por matriz. Com base num estudo na sala de aula, este autor procura responder às seguintes questões: Qual das representações promove melhor a compreensão conceptual? Que representação generaliza melhor os conteúdos matemáticos? Que representação se aplica melhor para encontrar soluções aproximadas? Que representação se aplica melhor para encontrar soluções exactas? Que representação é melhor para um tipo dado de tecnologia? Que representação se adequa melhor ao nível de aprendizagem e ao conforto do estudante? A resposta para essas questões depende do problema matemático. Em todos os casos, para alcançar o verdadeiro poder matemático, os estudantes devem ser familiarizados com múltiplas representações, permitindo-lhe escolher aquelas que melhor se aplicam a uma dada situação.

Conforme NCTM (2009), a importância das múltiplas representações no estudo das funções é fundamentada na ideia de que as funções são uma das ferramentas importantes para o desenvolvimento do raciocínio, fornecendo uma vasta informação para o estabelecimento de conexões. Os elementos chave do raciocínio no trabalho com funções incluem os seguintes aspectos.

A utilização de múltiplas representações das funções. Representar a função de várias formas incluindo a representação tabelar, gráfica, simbólica, visual e verbal. Decidir quais das representações são mais úteis para resolver o problema. Mover-se de forma flexível entre as representações escolhidas.

Modelagem, usando famílias de funções. Trabalhar para desenvolver um modelo matemático razoável para a situação do respectivo contexto do problema, aplicando o conhecimento acerca do comportamento característico das diferentes famílias de funções.

Analisar o efeito dos parâmetros. Analisar os efeitos dos coeficientes ou de outros parâmetros da representação analítica da função.

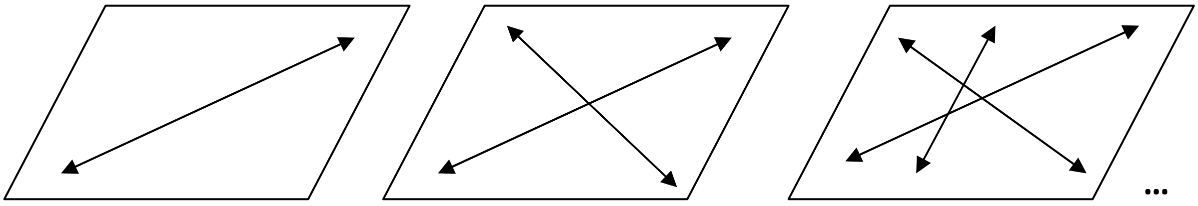
A utilização só da representação simbólica da função faculta informação muito mais reduzida sobre a função, enquanto as múltiplas representações permitem aos alunos compreender melhor o comportamento duma função. Os estudantes necessitam de estabelecer conexões entre as diferentes representações, por exemplo a relação entre os zeros da função a solução de uma equação e o ponto de intersecção dos gráficos.

No entanto, segundo Athanasios, Iliada e Nikos (2006), a maioria dos alunos do ensino secundário e universitário apresenta grande dificuldade para trocar da forma flexível entre conjunto das representações duma dada função e seleccionar as representações que sejam apropriadas para a resolução de problemas. Os resultados das investigações neste domínio evidenciam que a utilização de softwares matemáticos sugeriram pistas preliminares, para ajudar os alunos a superarem com sucesso estas dificuldades. Conforme Yerushalmy e Schwartz (1993, in Rider, 2004) esta falta de conexão é devida à ordem em que as representações são ensinadas.

> Dentro do processo tradicional de aprender a álgebra nas escolas secundárias, a aprendizagem dos gráficos das funções, ocorre geralmente após um período longo de manipulações numéricas e simbólicas e é introduzida normalmente como um estado final do assunto. Nós pensamos que é completamente provável que determinadas dificuldades observadas na compreensão das funções em várias reapresentações (numérica, visual e simbólica) são, devido a esta forma de aprendizagem (p. 22).

Como as sucessões são também funções, mas de variável natural, tais conexões entre as representações podem ser estabelecidas ainda com maior facilidade.

No NCTM (2009), analisa-se a seguinte tarefa de exploração: “Desenvolva uma representação simbólica para uma função que gera o número de regiões em que fica dividido um plano traçando ***n*** rectas, tais que nunca duas delas são paralelas e num ponto não se intersectam mais que duas rectas”, assim como mostra a figura.



Na sala de aula os alunos podem resolver este problema estabelecendo conexões entre várias representações. Porém, a agilidade do aluno depende do seu nível de experiência matemática.

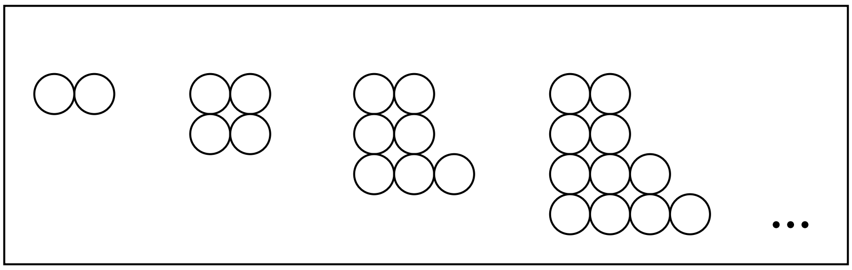
Método 1. Após ter explorado um número de casos, possivelmente utilizando uma ferramenta interactiva de geometria, os estudantes podem produzir uma tabela de valores para o número de rectas L e o número de regiões R, como mostra a figura:

Número de rectas (L)	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Número de regiões (R)	**2**	**4**	**7**	**11**	**16**	**22**

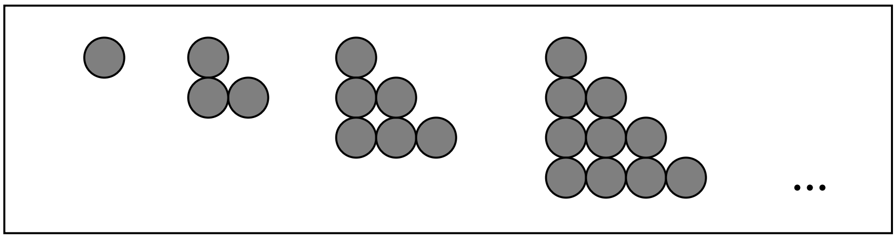
Observando as diferenças entre termos consecutivos da sucessão do número de regiões, os estudantes podem defini-la por recorrência. Seria então assim:

R (1) = 2, R (2) = 4 = R (1) +2, R (3) = 7 = R (2) +3, …, R (L) = R (L-1) +L, …

Método 2. Utilizando uma representação geométrica com auxílio de moedas, telhas ou outros objectos, os estudantes podem observar uma regularidade em que o L é a ordem do termo da sucessão do número de regiões e o R é o valor do termo da respectiva ordem da sucessão, assim como mostra a figura.

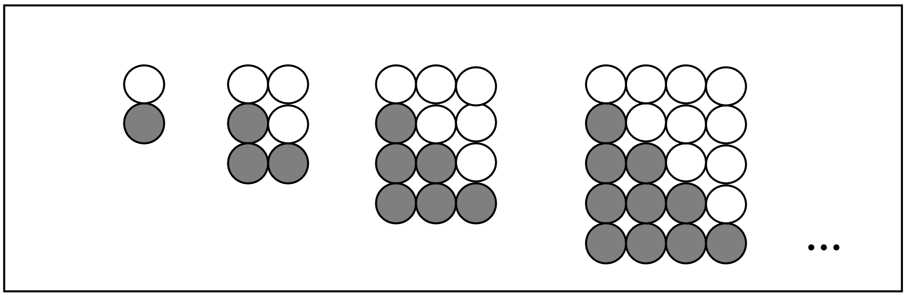


Em seguida retirando um objecto da fila superior de cada termo, obtêm-se a sucessão dos números triangulares.



Dobrando o padrão obtido obtêm-se a sucessão dos números rectangulares que contem

$L \times (L+1)$ objectos, tal como mostra a figura.



Então a expressão analítica da sucessão do número de regiões pode ser escrita na forma:$R = \frac{1}{2} \times L \times (L+1)$ +1= $\frac{1}{2}L^2 + \frac{1}{2}L + 1$.

Este tipo de raciocínio, demonstra como o estudante, a quem que lhe foi dada oportunidade de utilizar uma representação geométrica simples, conseguiu chegar à representação simbólica, construindo conexões entre as representações e entre conceitos já conhecidos.

Método 3. Utilizando a calculadora gráfica, os estudantes podem introduzir os dados numéricos da tabela construída anteriormente, obtendo assim uma representação gráfica da sucessão. Por causa da forma parabólica da representação gráfica obtida, os alunos conjecturando e usando a regressão quadrática, chegarão à expressão analítica: R = $0.5L^2 + 0.5L + 1$. Este modelo analítico poderia ser testado usando pares de números da tabela.

Método 4. Método das diferenças finitas. O professor poderia pedir que os estudantes se focalizem nas diferenças entre termos consecutivos da sucessão, e observar que as primeiras diferenças são: 2, 3, 4, 5, e assim por diante. Aplicando o raciocínio algébrico, os estudantes podem examinar os dados e observar que sendo as segundas diferenças constantes, então a expressão analítica é uma função quadrática: $R = aL^2 + bL + c$. Resolvendo o sistema de equações com três incógnitas: $\begin{cases} a + b + c = 2 \\ a \times 2^2 + b \times 2 + c = 4 \\ a \times 3^2 + b \times 3 + c = 7 \end{cases}$

conclui-se que os valores dos coeficientes *a, b, c* são $a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{2}, c = 1$.

Desta forma a expressão analítica da sucessão seria: $R = \frac{1}{2}L^2 + \frac{1}{2}L + 1$.

Pelo exposto pode-se concluir que os alunos devem desenvolver a capacidade de lidar com várias representações. As conexões entre várias representações são benéficas na aprendizagem das sucessões, no entanto, não são tão fáceis de estabelecer. Assim, o professor deve estimular os alunos a utilizarem múltiplas representações e escolher entre elas aquela que é mais adequada para solucionar o problema.

Capítulo 3

A prática lectiva

3.1. Importância das tarefas

Neste capítulo apresento a importância da selecção das tarefas e da estrutura das aulas no processo de estabelecimento de conexões, baseando-me nalguns documentos curriculares e na perspectiva de alguns autores acerca disso.

Para estudar o papel das conexões na aprendizagem das sucessões, o professor deverá seleccionar tarefas para a sala de aula, que estimulem os alunos a estabelecer conexões, permitam a abordagem de várias representações, e contribuam para a construção de novos conhecimentos. A selecção dos problemas é importante no sentido que é pouco provável que os alunos aprendam a estabelecer conexões, se não trabalharem com problemas ou situações que possuam pistas e que sugiram a existência de tais conexões (NCTM, 2008). Porém, as tarefas devem ter um determinado grau de desafio e servir como contexto de aprendizagem. Segundo Ponte e Serrazina (2009, p. 3), “os alunos podem ser parte muito mais activa do processo de construção do conhecimento, desde que lhes sejam propostas tarefas desafiantes, que se situem ao seu alcance”. O professor além disso “tem de considerar todo o conjunto das tarefas a propor na unidade, incluindo naturalmente a sua diversidade (…), tempo de realização e representações e materiais a utilizar”. Conforme Bruner (1975), a condição básica para activar a exploração de alternativas numa tarefa é ter um nível óptimo de incerteza, curiosidade. As rotinas podem provocar confusão e angústia, reduzindo a tendência a explorar. As *Normas profissionais para o ensino da matemática* (NCTM, 1994), listam as seguintes características das tarefas que devem ser implementadas na sala de aula:

- Apelam à inteligência dos alunos;
- Desenvolvem a compreensão e aptidão matemática;
- Estimulam os alunos a estabelecer conexões e a desenvolver um enquadramento coerente para as ideias matemáticas;
- Apelam à formulação e resolução de problemas e ao raciocínio matemático;
- Promovem a comunicação sobre Matemática;
- Mostram a Matemática como uma actividade humana permanente;

- Têm em atenção diferentes experiências e predisposições dos alunos;
- Promovem o desenvolvimento da predisposição de todos os alunos para fazer Matemática.

A eficiência das tarefas implementadas na sala de aula depende da sequência em que são apresentadas, como são trabalhadas pelos alunos e como servem de base para a discussão e construção de novos conhecimentos. Segundo Ponte (2009, p. 103), "as tarefas a propor têm de estar inter-relacionadas entre si e devem ser apresentadas aos alunos em sequências coerentes (cadeias de tarefas) de modo a proporcionar um percurso de trabalho favorável à sua aprendizagem". "A integração deste tipo de actividades no currículo da Matemática escolar é uma das vias para que todos os estudantes descubram conexões entre vários tópicos, desenvolvam a sua capacidade de comunicar matematicamente e aumentem o seu desempenho na resolução de problemas" (Vale & Pimentel, 2005, p. 19).

Segundo Ponte (2005), os alunos aprendem no resultado da actividade que realizam e da reflexão que efectuam sobre esta actividade. A tarefa é "o objectivo da actividade" (p. 11). Uma tarefa "pode ser formulada pelo professor e proposta ao aluno, ser da iniciativa do próprio aluno e resultar até de uma negociação entre o professor e o aluno" (p. 11). Além disso, existem vários tipos de tarefas. Entre os tipos de tarefas existentes evidenciam-se também os problemas e os exercícios a que damos especial relevo neste estudo.

Um problema é uma tarefa que levanta uma questão, apresenta interesse para ser resolvida e não tem previamente uma estratégia para a resolver. Segundo Ponte (2005), o problema é uma tarefa fechada (é dito duma forma clara o que é dado e o que é pedido), que tem um desafio elevado. No ensino da matemática os problemas sempre tiveram um lugar muito importante. O papel educativo dos problemas foi estudado por vários autores, entre eles evidenciam-se os trabalhos de Schoenfeld (1996), que enumera as seguintes características de um bom problema:

- Possibilidade de ser resolvido por vários caminhos.
- Permite o trabalho dos vários conceitos matemáticos, que convocam ideias matemáticas relevantes.
- Possibilidade de generalizar e estender.
- É acessível, facilmente compreendido.

Segundo George Pólya (1975), os problemas em que os alunos deveriam ser envolvidos para realizarem novas aprendizagens deveriam ter as seguintes características:

- Envolver tanto o trabalho dos conceitos base que pretendemos consolidar, como o trabalho de vários conceitos matemáticos.
- Envolver a comunicação.
- Obrigar a análise retrospectiva evidenciando a plausibilidade de resposta.
- Promover o desenvolvimento do pensamento matemático.
- Permitir o desenvolvimento de capacidades de visualização e representação.
- Evidenciar múltiplas conexões entre os conteúdos matemáticos e extra-matemáticos.

Como capacidade transversal, a resolução de problemas conforme NCTM (2008), "não só constitui um objectivo de aprendizagem matemática, como é também um importante meio pelo qual os alunos aprendem matemática" (p. 57). Segundo o mesmo documento, os programas de ensino do pré-escolar ao 12.º ano deverão habilitar todos os alunos para:

- Construir novos conhecimentos matemáticos através da resolução de problemas;
- Resolver problemas que surgem em matemática e em outros contextos;
- Aplicar a adaptar uma diversidade de estratégias adequadas para resolver problemas;
- Analisar e reflectir sobre o processo de resolução matemática de problemas (p. 57).

Não existe actividade matemática sem resolução de problemas mas estas devem ser introduzidas com regularidade. Contudo, a actividade matemática não se limita só à resolução de problemas. Além de resolução de problemas, os exercícios têm lugar próprio no ensino da Matemática. Os exercícios são considerados segundo Ponte (2005), tarefas fechadas mas de desafio reduzido. Estes "servem para o aluno pôr em prática os conhecimentos já anteriormente adquiridos" e "servem essencialmente um propósito de consolidação de conhecimentos" (p. 14).

Para favorecer o estabelecimento de conexões, durante as actividades na sala de aula, o professor deverá diversificar as tarefas, introduzir com regularidade problemas e fazer exercícios bem escolhidos que verificam a compreensão dos conceitos fundamentais por parte dos alunos e ainda propor aos alunos tarefas que se enquadram em contextos da realidade e contextos matemáticos.

3.2. A importância da planificação e da estrutura da aula

Ensinar é uma actividade que contribui para auxiliar ou moldar o desenvolvimento. Ao planear o ensino seria desaconselhável ignorar o que se sabe sobre o desenvolvimento do estudante, suas compulsões e oportunidades (Bruner, 1975).

O modo como o professor planifica as suas aulas reflecte-se na dinâmica da sala de aula. A planificação da aula deverá dar resposta às seguintes questões: o que se vai ensinar, porquê e como? Conforme Abrantes (1985, p. 1), "(…) sem bons planos dificilmente haverá um bom ensino". No entanto, o mesmo autor acentua que não se pode confundir o planear com o executar. Um professor pode planear uma aula com muito rigor, mas "executá-la de maneira deficiente", enquanto outro professor planeando a sua aula duma forma menos rigorosa, "aparentemente desorganizada", realizará uma aula bem estruturada, com bons ambientes de aprendizagem. A aula é a unidade fundamental do ensino da Matemática nas escolas, mas não há nenhuma forma estandardizada de a realizar. O professor deverá ser flexível em relação à planificação da aula que constrói. Durante a leccionação duma aula pode surgir uma situação imprevista que pode "proporcionar boas experiências de aprendizagem" (Abrantes, 1985, p. 8). Este tipo de situações serão aproveitadas com utilidade "se o professor não estiver amarrado ao seu plano de lição e se sentir razoavelmente seguro do papel que desempenha em relação aos seus alunos" (Abrantes, 1985, p. 8). Dando prioridade a uma planificação global e flexível da sua actividade, onde tenham lugar iniciativas muito diversas, o professor iniciante seria capaz de praticar rapidamente um tipo de ensino motivador, não rotineiro e não centrado em si próprio, mas nos seus alunos (Abrantes, 1985).

As estratégias de ensino assumidas pelo professor na planificação têm uma enorme importância na forma como aula está a decorrer. Para estimular os alunos a estabelecer conexões, um aspecto essencial é a promoção de um ambiente na sala de aula que encoraje os alunos a acompanhar ideias matemáticas, a reflectir e a comparar as soluções (NCTM, 2008). O ensino directo, em que o professor apresenta a matéria ao aluno e depois passa para a resolução de exercícios e tarefas padrão, não é benéfico para exploração de conexões matemáticas. O novo Programa de Matemática (Ponte *et al.*, 2007) abre uma importante oportunidade de "transformar as práticas de ensino do modelo do ensino directo para um ensino – aprendizagem exploratório" (Ponte & Serrazina, 2009, p. 6). A estratégia de ensino – aprendizagem exploratória pretende evitar os efeitos negativos de começar pela introdução de informação. Estes efeitos podem conduzir os alunos a não evidenciar a informação importante, a ficarem confusos e sem perceber bem o que tinham aprendido. "Os momentos de reflexão, discussão e análise crítica posteriores à realização de uma actividade prática assumem um papel importante" (Ponte, 2005, p. 23). No entanto não é "a partir das actividades práticas que os alunos aprendem, mas a partir da reflexão que realizam sobre o que fizeram durante essas actividades práticas" (Ponte, 2005, p. 23). Com um planeamento prévio, o professor poderá utilizar os momentos de discussão, "para desenvolver uma matemática interessante e estabelecer conexões que, de outra forma, poderiam ser negligenciadas" (NCTM, 2008, p. 396).

Na aprendizagem de vários tópicos matemáticos em especial no estudo das sucessões, é importante aprender a utilizar a linguagem, as convenções e as diferentes representações. Neste sentido "os professores deverão iniciar os alunos nas representações matemáticas convencionais e ajudá-los a utilizarem-nas eficazmente, recorrendo às representações pessoais e idiossincráticas dos alunos sempre que necessário" (NCTM, 2008, p. 425). Os estudantes devem perceber que diferentes representações do mesmo conceito podem transmitir informações distintas. Cabe ao professor estimular os alunos "a associar as suas imagens pessoais a representações mais convencionais" (NCTM, 2008, p. 425) e dar-lhe oportunidades de estabelecer conexões entre várias formas de raciocinar sobre os mesmos conteúdos matemáticos. "Problemas ricos, um ambiente que apoie o pensamento matemático e o acesso a ferramentas contribuem para que os alunos observem as conexões" (NCTM, 2008, p. 421).

Como já foi referido, uma parte significativa da responsabilidade do professor consiste no planeamento de tarefas que proporcionem aos alunos o gosto de aprender conceitos através da sua exploração e praticar uma variedade de heurísticas. Os alunos, durante a discussão, podem apresentar sugestões originais que podem conduzir a novas conjecturas ou investigações. Poderão surgir também generalizações cuja validade é desconhecida pelo professor. Nestes casos, "o professor deve ser corajoso, já que mesmo nas aulas planeadas cuidadosamente, pode surgir imprevistos que conduzam a territórios desconhecidos” (NCTM, 2008, p. 402). Nem todas as respostas conduzem a discussões produtivas e o tempo limitado não permite explorar todas as ideias interessantes. Compete ao professor exercitar a sua tomada de decisão para decidir que respostas não abandonar e definir que respostas não são benéficas para o objectivo da aula. Conforme Thompson (1992 in NCTM, 2008), “o professor deverá também ser reflexivo de modo a criar um ambiente no qual os alunos se sintam com disposição para reflectirem sobre o seu trabalho à medida que se envolvem nele” (p. 421). O planeamento de aulas e a construção de cenários de exploração didáctica requerem tempo e experiência. Conforme NCTM (2008, p. 402), “ensinar é por si, uma actividade de resolução de problemas”, como tal “os professores que se revelam bem sucedidos no ensino da resolução de problemas têm de ter, eles próprios, os conhecimentos e a predisposição típicos de quem resolve problemas eficazmente”.

Capítulo 4

Proposta Pedagógica

No presente capítulo, apresento a subunidade de ensino sobre a qual incide este estudo, explicitando e justificando as opções tomadas à luz do programa da Matemática e das características da turma. Apresento, também, a planificação das tarefas implementadas em cada aula leccionada e uma descrição dos objectivos de cada uma. Por fim apresento uma descrição sumária das aulas leccionadas, procurando explicitar em que medida considero que os objectivos específicos das mesmas foram atingidos e os eventuais desvios verificados relativamente aos planos das aulas.

4.1. Caracterização da turma

A Escola Secundária de Vergílio Ferreira está situada na antiga Quinta dos Inglesinhos, freguesia de Carnide, onde ainda no sec. XIX se localizava uma comunidade de frades católicos irlandeses.

Carnide é caracterizada, enquanto espaço urbano por uma coexistência entre a zona "velha" e "nova". A zona "velha" evidencia-se por ter uma população reformada e pobre, com desempregados e operários a habitar os centros tradicionais e os bairros camarários. A zona "nova" é uma zona de classes médias, o que permite uma acentuada divisão, pelas classes sociais, do território deste sítio de Lisboa.

A Escola foi inaugurada em 6 de Outubro de 1983, com um total de 36 turmas, do 3.º ciclo do Ensino Básico.

Em 1986, foram construídos os blocos F, G e H, o que coincidiu com o lançamento do Ensino Secundário na Escola.

Em 1993, passou a denominar-se Escola Secundária de Vergílio Ferreira, tendo sido adoptado o dia 28 de Janeiro como Dia da Escola, comemorando a data do nascimento do seu patrono. No mesmo ano foi formalizada a Associação de Estudantes.

Em 1995, foi construído o bloco I, que veio dar resposta ao aumento da carga curricular do 12.º ano.

Em 1997, a escola passou a ter um logótipo e uma bandeira escolar.

Em 1999, foi construído o pavilhão gimnodesportivo.

Em 2002, foi construído o edifício do Centro de Recursos Educativos.

Em 27 de Julho de 2009, teve início a Fase do Programa de Modernização da Escola.

Actualmente, a escola engloba, no que respeita ao ensino básico: cinco turmas do 7.º ano, cinco turmas de 8.º ano, três turmas do 9.º ano. O ensino secundário está representado por nove turmas do 10.ºano, 10 turmas do 11.ºano e 10 turmas do 12.ºano.

A turma do 11.º ano (perfil ligado às ciências e tecnologias, área de Biologia) que estou a acompanhar tem 29 alunos. As aulas de Matemática são frequentadas por 23 alunos devido a existência de seis alunos assistentes. Entre os 23 alunos da turma, 13 são do sexo masculino e 10 do sexo feminino. As idades dos alunos variam entre 17 e 18 anos. Os alunos da turma têm um desenvolvimento psicológico normal.

No que diz respeito ao percurso escolar, na turma há três alunos que foram retidos no 11.º ano e um aluno retido no 10.º ano. Na turma entraram este ano cinco alunos que se integraram muito bem.

Quanto à estrutura das famílias, a turma tem seis alunos com famílias monoparentais (divorciados) e os restantes com famílias estruturadas. Entre os alunos da turma: dois são filhos únicos, 11 têm um irmão, seis têm dois irmãos, três alunos têm três irmãos e um aluno tem cinco irmãos. Todos os alunos da turma são naturais de Portugal com nacionalidade portuguesa. A maioria dos pais tem formação superior. Não há famílias analfabetas. A nível socioprofissional os pais de quatro alunos são empresários, os pais de cinco alunos são professores e os pais dos restantes alunos exercem outras profissões.

Quanto a disciplina de Matemática, os alunos são bem motivados. Trabalham bem em grupo, são empenhados em aprender, esclarecer dúvidas mostrando um grande interesse e envolvimento nas tarefas propostas. É uma turma que está habituada ao ensino por descoberta, graças ao trabalho desenvolvido pela professora no 10.ºano. As dúvidas que os alunos lançam não são de imediato esclarecidas pela professora, pois, sempre que possível os alunos esclarecem-nas uns aos outros. Devido à área de perfil da turma, as preferências dos alunos para o futuro estão mais inclinadas para a Biologia.

A directora da turma iniciou a actividade com esta turma no início do ano lectivo. A turma do 11.º vem de ano passado com vários problemas de disciplina e aproveitamento. No entanto a professora afirma que a turma está muito melhor relativamente ao ano passado devido ao esforço feito pelos alunos. Segundo diz a directora da turma: “ (…) a turma é heterogénea em todos os aspectos: relacional, de comportamento, de aproveitamento e de atenção. É preciso chamar continuamente à atenção. O resultado é evidente. A turma é receptiva à mudança e nota-se um esforço por parte dos alunos para melhorar.” Desde o início do ano, a directora da turma junto com os alunos definiram os seguintes objectivos: contribuir juntos para melhorar as notas e o comportamento, melhorar a assiduidade e atitude perante a escola.

Ao longo das duas reuniões do concelho de turma a que assisti, foi possível captar a opinião de outros professores sobre a turma. Por exemplo, quanto ao comportamento e ao aproveitamento, um dos professores afirma que: “É uma turma boa, mas são muito faladores por vezes perturbadores.” Segundo dizem alguns professores a perturbação nas aulas aparece devido a um ou outro aluno que “ (…) dificulta e desvaloriza o trabalho dos outros.” Segundo dizem os professores que trabalharam com a turma no ano passado a turmas mantêm-se heterogénea, são difíceis de organizar, mas melhoraram relativamente ao ano passado. Há alunos que têm um grande empenho, mas também há alunos que não se empenham. Gostam de participar mas não sabem dirigir as participações. Um dos professores afirma que: “A turma trabalha bem. Alguma tentativa de falar, mas eu vejo-os empenhados (…).” Segundo outro professor: “Os alunos são bem empenhados. Melhoraram em relação ao ano passado. Os alunos que entraram este ano estão bem integrados. (…).”

A maioria dos alunos é autónoma, excepto quatro que mostram maiores dificuldades neste aspecto.

Quanto ao envolvimento dos encarregados de educação, a directora da turma afirma que os mesmos mostram interesse pelo seu educando, participam nas reuniões e são receptivos quando chamados à escola, fora das reuniões.

Os resultados do primeiro período quanto ao aproveitamento mostraram uma melhoria em relação ao ano passado. No entanto, cinco alunos acabaram com negativas a Matemática, três alunos com negativas a Filosofia, dois alunos com negativa a Educação Física e dois alunos com negativa à Físico-Química. A classificação média da turma para o primeiro período quanto ao aproveitamento à Matemática foi de 13 valores. No segundo período do ano lectivo, os alunos mostraram um empenho semelhante ao do período anterior. A classificação média da turma quanto ao aproveitamento à Matemática manteve-se. Os alunos mostraram um bom envolvimento nos trabalhos desenvolvidos nas aulas. Nas autoavaliações para este período, os alunos afirmaram que as tarefas em que se empenharam e aprenderam mais são as de grupo. Segundo dizem os alunos, a utilização do quadro interactivo com o software Geo-Gebra foi um bom auxílio na aprendizagem das funções. Muitos alunos afirmam que aprenderam a trabalhar de forma autónoma nas aulas e evoluíram nos aspectos da atenção e concentração. Pelo trabalho que foi realizado por mim, no acompanhamento dos registos dos trabalhos efectuados nos cadernos, verificou-se que os alunos melhoraram os seus registos das aulas relativamente ao primeiro período e tentaram de uma forma regular realizar os trabalhos de casa. Pelo que foi dito, considero o empenhamento dos alunos desta turma nos trabalhos da aula e de casa, até ao presente momento, razoável.

4.2. As sucessões nos programas de Matemática em Portugal

O conceito de sucessão nos programas de Matemática em Portugal é introduzido apenas no 11.º ano do ensino secundário, embora seja esboçado ao longo do percurso escolar. No primeiro ciclo do ensino básico, são observados padrões e regularidades de uma forma essencialmente empírica. Ingressando no segundo e terceiro ciclo do ensino básico, os alunos confrontam-se com o conceito de sequência.

A seguir serão analisadas as diferentes etapas dos programas de Matemática até a definição de sucessão.

O estudo preliminar das sucessões no Ensino Básico

O conceito da sucessão está ligado ao estudo dos padrões no ensino da Matemática. A Matemática tem um notável potencial de revelação de estruturas e padrões que nos permitem compreender o mundo que nos rodeia. Bruner (1975, p. 43) refere que "A matemática é, seguramente, a metalinguagem mais geral até hoje criada, fornecendo as formas e estruturas que permitem compreender as regularidades da natureza" afirmando que a "nossa sobrevivência poderá depender um dia de conseguir uma linguagem matemática para apreender o que há de contínuo cumulativo sob aparência surpreendente das modificações".

Analisando o currículo nacional constata-se que o estudo dos padrões atravessa todos os tópicos dos programas de Matemática em Portugal desde o ensino básico até ao ensino secundário. O Currículo nacional do ensino básico (2001) salienta a especificidade da matemática como a "ciência das regularidades e da linguagem dos números, das formas e das relações" (p. 58). Ao longo de todos os ciclos, o Currículo nacional do ensino básico (2001) evidencia que no domínio do Números e Cálculos, a competência matemática que os alunos devem desenvolver inclui: “A predisposição para procurar e explorar padrões numéricos em situações matemáticas e não matemáticas e o gosto por investigar relações numéricas, nomeadamente em problemas envolvendo divisores e múltiplos de números ou implicando processos organizados de contagem” (p. 60). No domínio da Geometria a competência matemática que os alunos devem desenvolver inclui: “A predisposição para procurar e explorar padrões geométricos e o gosto por investigar propriedades e relações geométricas” (p. 62). No que respeita ao domínio da Álgebra e Funções, a competência matemática que os alunos devem desenvolver inclui: “A predisposição para procurar padrões e regularidades e para formular generalizações em situações diversas, nomeadamente em contextos numéricos e geométricos” (p. 66).

Observando, em particular, os programas de matemática do ensino básico (Ministério da Educação, 1990, 1991), podem-se salientar os seguintes exemplos que revelam o estudo dos padrões.

No 1.º ciclo em especial no 1.º ano, a criança começa a aprender a “efectuar contagens 2 a 2, 3 a 3, etc.” (Ministério da Educação, 1990, p. 173). Em relação ao 2.º ano, os alunos continuam com a descoberta de “regularidades nas contagens de 5 em 5, 10 em 10” (Ministério da Educação, 1990, p. 174), desenvolvendo a capacidade de “explorar e usar regularidades e padrões na adição e na subtracção” (Ministério da Educação, 1990, p. 174). No domínio da geometria, os alunos devem desenvolver a capacidade de “Fazer desenhos decorativos: — frisos em papel quadriculado; — rosáceas contornando a base circular de um objecto” (Ministério da Educação, 1990, p. 182). Quanto aos 3.º e 4.º anos, os alunos continuam a desenvolver a capacidade de “explorar e usar regularidades e padrões na adição, subtracção e multiplicação” (Ministério da Educação, 1990, p. 176). No domínio da geometria, os alunos desenvolvem a capacidade de “Desenhar frisos e rosáceas. Fazer uma composição a partir de um padrão dado” (Ministério da Educação, 1990, p. 183).

No programa do 2.º ciclo (Ministério da Educação, 1991a), destaca-se no 5.º ano que os alunos devem ser envolvidos em actividades que os levem “a fazer conjecturas, a querer descobrir, a criar o gosto pela Matemática ao mesmo tempo que contribuem para um melhor conhecimento dos números e das operações, para a descoberta de relações e propriedades, para a consolidação das técnicas de calculo” (p. 18). No capítulo Geometria do 6º ano evidencia-se que “Através da resolução de situações problemáticas que envolvam construção, desenho, medição, comparação, pretende-se facilitar intuições, estimular a elaboração e testagem de conjecturas, permitir a descoberta de relações" (p. 35).

Relativamente ao programa do 3.º ciclo (Ministério da Educação, 1991b), no 7.º ano "Retomando alguns assuntos já conhecidos para aprofundar um pouco mais (múltiplo, divisor, potência...) os alunos irão trabalhar com números naturais, decompondo-os em somas ou produtos, procurando divisores, formando potências, associando-os segundo propriedades comuns (quadrados perfeitos, números primos, etc.) " (p. 19). Com mais evidência o estudo dos padrões revela-se no 8.º ano, onde se encontram os seguintes objectivos: "Descobrir relações entre números; Continuar sequências simples de números: divisores, múltiplos, quadrados, cubos, potências de um número, (…)"(p. 38). A propósito das sequências de números, as orientações metodológicas para este ano referem que: "(…) poderão colocar-se questões tais como: procurar o termo que vem a seguir; tentar encontrar uma lei de formação; ver se os termos se aproximam de algum número; estudar o que acontece ao multiplicar sucessivamente um número positivo (negativo) por um factor maior (menor) que 1" (p. 38). No 9.º ano "Poderá ainda sugerir-se aos alunos a realização de uma composição decorativa baseada em isometrias" (p. 58).

No Novo programa de Matemática do Ensino Básico (Ponte *et al*., 2007), o estudo das sequências tem uma componente mais forte, e continua a ser promovido durante os três ciclos do ensino básico. Para o 1.º ciclo, no capítulo Números e operações, as indicações metodológicas indicam: "Os alunos devem procurar regularidades em sequências de números finitas ou infinitas (estas usualmente chamadas sucessões), e podem também observar padrões de pontos e representá-los tanto geométrica como numericamente" (Ponte *et al*., 2007, p. 14). A importância que se atribui ao estudo das sequências neste ciclo é acentuada pela ideia: "este trabalho com regularidades generalizáveis, segundo regras que os alunos podem formular por si próprios, ajuda a desenvolver a capacidade de abstracção e contribui para o desenvolvimento do pensamento algébrico" (Ponte *et al*., 2007, p. 14). Para os 1.º e 2.º anos, no tópico Regularidades. Sequências, os objectivos específicos são orientados no sentido de "Elaborar sequências de números segundo uma lei de formação e investigar regularidades em sequências e em tabelas de números"(Ponte *et al*., 2007, p. 17). Durante os 3.º e 4.º anos no tópico Regularidades. Sequências os alunos continuam a "investigar regularidades numéricas" (Ponte *et al*., 2007, p. 18) e a "explorar regularidades em tabelas numéricas e tabuadas, em particular as dos múltiplos” (Ponte *et al*., 2007, p. 18).

Para o 2.º ciclo, no capítulo Números e operações as orientações metodológicas do programa atribuem uma grande importância ao estudo das sequências, justificando: “O trabalho com sequências numéricas em que se pede ao aluno que continue ou invente sequências de número estabelece uma ponte conceptual importante entre os três ciclos do ensino básico” (Ponte *et al*., 2007, p. 32). No capítulo Álgebra do mesmo ciclo evidencia-se que “O estudo de sequências envolve o trabalho com números e operações e proporciona o estabelecimento de relações e a explicitação de leis de formação” (Ponte *et al*., 2007, p. 40). No tópico Relações e regularidades, o programa exige que os alunos desenvolvam a capacidade de “Identificar e dar exemplos de sequências e regularidades numéricas e não numéricas. Determinar o termo seguinte (…) ampliar uma sequência numérica, (…) determinar termos de ordem variadas de uma sequência, sendo conhecida a sua lei de formação” (Ponte *et al*., 2007, p. 41). Neste ciclo ainda se dá ênfase à análise das relações entre os termos da sequência, sendo este um auxílio para “ (…) indicar uma lei de formação, utilizando a linguagem natural e simbólica” (Ponte *et al*., 2007, p. 41). Destaca-se neste ciclo a importância das diferentes representações. Assim os alunos devem desenvolver a capacidade de “Representar simbolicamente relações descritas em linguagem natural e reciprocamente. Interpretar diferentes representações de uma relação e relacioná-las” (Ponte *et al*., 2007, p. 41).

Em comparação com o 2.º ciclo, no 3.º ciclo, observa-se que no capítulo Álgebra, o tópico que é atribuído ao estudo das sequências tem denominação diferente: Sequências e regularidades. Ainda, neste tópico, a ênfase recai na utilização da notação simbólica para indicar uma lei de formação, não sendo pedida a utilização da linguagem natural. Os alunos devem desenvolver a capacidade de “Compreender a noção de termo geral de uma sequência numérica e representá-lo usando símbolos matemáticos adequados. Determinar um termo geral de uma sequência numérica e termo de várias ordens a partir do termo geral” (Ponte *et al*., 2007, p. 56).

O estudo das sucessões no Ensino Secundário

No programa do ensino secundário (Silva, Fonseca, Martins, Fonseca & Lopes, 2002a) nos objectivos e competências gerais da disciplina, na secção capacidades/aptidões salienta-se que os alunos devem desenvolver a capacidade de “(…) formular hipóteses e prever resultados, (…) formular generalizações a partir de experiências, (…) descobrir relações (…)”(p. 4).

Passando do ensino básico para o ensino secundário, os alunos pela primeira vez confrontam-se com o conceito de sucessão. No programa (Silva *et al*., 2002b) Fonseca, Martins, Fonseca & Lopes, 2002b) do 11.º ano atribui-se um tema separado às sucessões: Sucessões Reais que tem o seguinte desenvolvimento:

> **Sucessões**
> - Definição e diferentes formas de representação
> - Estudo de propriedades: monotonia e limitação
> - Progressões aritméticas: termo geral e soma de ***n*** termos consecutivos
> - Estudo intuitivo da sucessão de termo geral $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ no contexto de modelação matemática; primeira definição do número ***e.***
>
> **Limites**
> - Infinitamente grandes e infinitamente pequenos.
> - Limites de sucessões e convergência. Noção de limite real. Ilustração de alguns resultados que justifiquem a unicidade do limite seguida da demonstração desse teorema.
> - A convergência de sucessões monótonas e limitadas. Exemplos de sucessões monótonas não convergentes. Exemplos de sucessões limitadas não convergentes. Critério da majoração e teorema das sucessões enquadradas.
> - Problema de limites com progressões. (Silva *et al*., 2002b, pp. 8,9).

Nas indicações metodológicas "As sucessões aparecem com uma forma de organizar possíveis resoluções para situações problemáticas que são apresentadas com base em aspectos da realidade (social) e em aspectos do estudo das diversas ciências (Matemática incluída)" (Silva *et al*., 2002b, p. 8). No entanto, "A resolução de problemas permite chegar ao conceito de sucessão, aceder à compreensão de propriedades importantes de sucessões particulares e especialmente úteis, bem como à necessidade de elaboração de representações formalizadas"(Silva *et al*., 2002b, p. 8). O estudo das sucessões no 11.º ano permite "chegar aos conceitos de infinitamente grandes, de infinitamente pequenos e de limite de uma sucessão" (Silva *et al*., 2002b, p. 9). Neste capítulo ainda "o estudante poderá ser solicitado a estudar, por exemplo, a curva de Von Koch ou o poliedro fractal" (Silva *et al*., 2002b, p. 9).

Atendendo ao exposto, no Ensino Secundário, os alunos possuem já conhecimentos matemáticos suficientes para iniciar o estudo das sucessões reais. Sendo as sucessões reais funções de variável natural, cujo contradomínio está contido em IR, as sequências infinitas de números reais estudadas no ensino básico não são mais do que os contradomínios da sucessões reais. Tornando-se cada vez mais conscientes das conexões entre diversos tópicos estudados no ensino básico e diferentes áreas, os estudantes desenvolvem a capacidade de aplicar os conhecimentos sobre as sequências no estudo das sucessões, olhando para a matemática como um todo integrado.

Conceitos matemáticos fundamentais envolvidos na subunidade Sucessões

Definição da Sucessão real

Sucessão real é uma função real de variável natural, ou seja, é uma função em que o domínio é o conjunto IN dos números naturais e as imagens são números reais.

As imagens da sucessão chamam-se **termos** da sucessão. O original de cada termo chama-se **ordem** desse termo. Como é um número natural, é habitual designa-lo pela letra $\boldsymbol{n}$.

Uma sucessão é normalmente designada por letras minúsculas e a ordem de qualquer termo é representada em índice. Seja a sucessão $\boldsymbol{u}$: IN → IR, então temos

$$\begin{array}{c} 1 \rightarrow u_1 \\ 2 \rightarrow u_2 \\ 3 \rightarrow u_3 \\ 4 \rightarrow u_4 \\ \ldots \\ n \rightarrow u_n \\ \ldots \end{array}$$

Os termos da sucessão (u_n) são: $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, \ldots$

u_5 é o 5.º termo da sucessão, ou seja, é a imagem do número 5;

u_{10} é o 10.º termo da sucessão, ou seja, é a imagem do número 10;

u_n é o termo de ordem $\boldsymbol{n}$ da sucessão ou o *enésimo* termo.

Termo geral de uma sucessão

Quando uma sucessão pode ser definida por uma expressão na variável $\boldsymbol{n}$, essa expressão chama-se **termo geral** da sucessão.

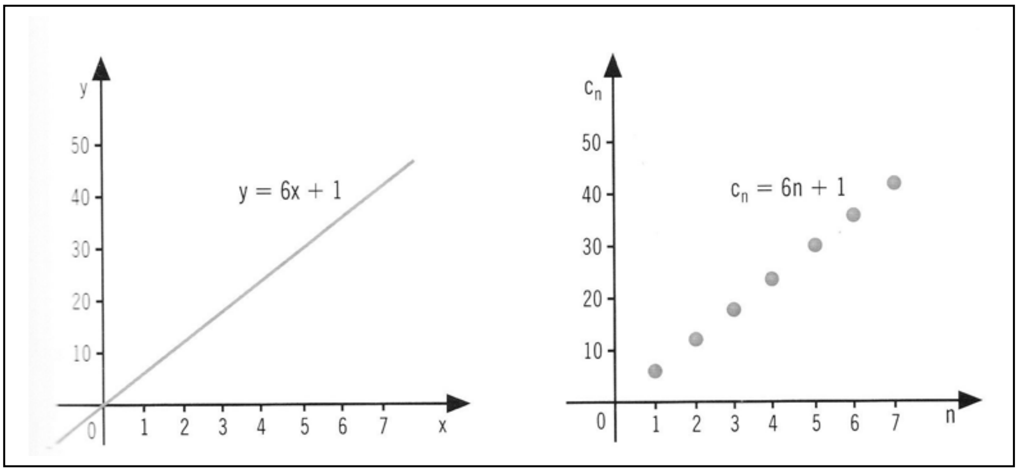
Exemplo. O termo geral dos números ímpares é $u_n = 2n - 1.$

Gráfico duma sucessão

O **gráfico** de uma sucessão é constituído pelo conjunto de **pontos isolados**, de coordenadas $(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{u_n})$, com $\boldsymbol{n} \in$ IN.

Exemplo.

A sucessão $c_n = 6n + 1$ é a restrição a IN da função linear $y = 6x + 1$



Sucessões definidas por recorrência

Sempre que, para definir um termo de uma sucessão, excepto o primeiro (ou os primeiros termos), se recorre à sua relação com termos anteriores e a sua posição na sequência, dizemos que se definiu essa sucessão **por recorrência**.

Exemplo.

A sucessão de Fibonacci, cujos primeiros termos são:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, … pode ser definida por recorrência deste modo:

$$\begin{cases} b_1 = 1 \\ b_2 = 1 \\ b_n = b_{n-1} + b_{n-2}\,, para\; n > 2 \end{cases}$$

Sucessões monótonas

Uma sucessão $(\boldsymbol{u_n})$ é **crescente (em sentido estrito)**, se cada termo for maior que o anterior, ou seja:

$$\boldsymbol{u_{n+1}} > \boldsymbol{u_n} \ , \forall \boldsymbol{n} \in \text{IN}.$$

Uma sucessão $(\boldsymbol{u_n})$ é **decrescente (em sentido estrito)**, se cada termo for menor que o anterior, ou seja:

$$\boldsymbol{u_{n+1}} < \boldsymbol{u_n} \ , \forall \boldsymbol{n} \in \text{IN}.$$

Uma sucessão é **monótona** se for crescente ou decrescente.

Dada uma sucessão $(\boldsymbol{u_n})$, se para qualquer valor de $\boldsymbol{n} \in$ IN:

$\boldsymbol{u_{n+1}} - \boldsymbol{u_n} > 0$, a sucessão é crescente em sentido estrito;

$\boldsymbol{u_{n+1}} - \boldsymbol{u_n} < 0$, a sucessão é decrescente em sentido estrito;

o sinal de $\boldsymbol{u_{n+1}} - \boldsymbol{u_n}$ variar, a sucessão não é monótona.

Exemplos.

1) $v_n = \frac{3n+2}{n+5}$.

$$v_{n+1} - v_n = \frac{3(n+1)+2}{n+1+5} - \frac{3n+2}{n+5} = \frac{3n+5}{n+6} - \frac{3n+2}{n+5} = \frac{13}{(n+6)(n+5)}$$

Como $\frac{13}{(n+6)(n+5)} > 0, \ \forall n \in$ IN, a sucessão $(\boldsymbol{v_n})$ é monótona crescente (em sentido estrito).

2) w_n=$(-1)^n$. Verificamos que os termos de ordem impar desta sucessão são negativos e os de ordem par são positivos. Logo, a sucessão não é monótona.

3) $u_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

$$u_{n+1} - u_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} - \left(\frac{2}{3}\right)^n = \left(\frac{2}{3}\right)^n \times \frac{2}{3} - \left(\frac{2}{3}\right)^n = \left(\frac{2}{3}\right)^n \left(\frac{2}{3} - 1\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^n \times \left(-\frac{1}{3}\right)$$

Como $\left(\frac{2}{3}\right)^n \times \left(-\frac{1}{3}\right) < 0, \ \forall n \in$ IN, a sucessão $(\boldsymbol{u_n})$ é monótona decrescente (em sentido estrito).

Nota: (não faz parte do programa)
Se $\boldsymbol{u_{n+1}} \geq \boldsymbol{u_n}$, $\forall \boldsymbol{n} \in$ IN, a sucessão$(\boldsymbol{u_n})$ diz-se **crescente em sentido lato**;
Se $\boldsymbol{u_{n+1}} \leq \boldsymbol{u_n}$, $\forall \boldsymbol{n} \in$ IN, a sucessão$(\boldsymbol{u_n})$ diz-se **decrescente em sentido lato.**

Sucessões limitadas

Um **majorante** da sucessão é um número real maior ou igual que todos os termos da sucessão. Se **M**∈ IR , for um majorante da sucessão $(\boldsymbol{u_n})$, então:

$\boldsymbol{u_n} \leq \mathbf{M}$, $\forall \boldsymbol{n} \in$ IN

Um **minorante** da sucessão é um número real menor ou igual que todos os termos da sucessão. Se **m**∈ IR, for um minorante da sucessão $(\boldsymbol{u_n})$, então:

$\boldsymbol{u_n} \geq \mathbf{m}$, $\forall \boldsymbol{n} \in$ IN

Uma sucessão é **limitada** quando é simultaneamente majorada e minorada, ou seja se **M** for um majorante e **m** um minorante da sucessão $(\boldsymbol{u_n})$,

isto é $\mathbf{m} \leq \boldsymbol{u_n} \leq \mathbf{M}$, $\forall \boldsymbol{n} \in$ IN

Exemplo.

Seja dada a sucessão de termo geral $a_n = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$.

Examinando os termos desta sucessão, podemos afirmar que todos os termos da sucessão são maiores do que 0 e menores ou iguais a 1, isto é:

$$0 < a_n \leq 1, \forall n \in \text{IN}$$

Diremos então que 1 é **um majorante** do conjunto dos termos da sucessão por **1 ser maior ou igual** a qualquer termo de a_n e que 0 é **um minorante** desse conjunto por **0 ser menor** a qualquer termo desta sucessão.

È importante referir que há uma infinidade de números que são majorantes do conjunto dos termos de a_n: qualquer número maior do que 1 é majorante, por ser também maior ou igual a qualquer termo da sucessão.

Do mesmo modo, 0 não é único minorante; qualquer número menor que zero é minorante do conjunto dos termos de a_n.

Assim:

- O conjunto dos majorantes dos termos desta sucessão é $[1, +\infty[$.
- O conjunto dos minorantes dos termos desta sucessão é $]-\infty, 0]$.

4.3. Estratégias de ensino concebidas para leccionar a subunidade Sucessões

O meu estudo recai na actividade de leccionação que desenvolvi com uma turma de 11.º ano do Curso de Ciências e Tecnologias, cujo currículo engloba a disciplina de Matemática A. A subunidade que leccionei Sucessões, refere-se à unidade: Tema III-Sucessões Reais, deste ano de escolaridade. A parte da subunidade mencionada engloba Definição e diferentes formas de representação das sucessões e o Estudo de propriedades: monotonia e limitação das sucessões.

Conforme as orientações curriculares, atribui-se uma grande importância, no estudo das sucessões, à resolução de problemas. No processo de resolução de problemas os alunos acedem com mais facilidade ao conceito de sucessão e às suas propriedades. Devido à natureza da problemática do estudo que me propus desenvolver que é importância das conexões entre vários tópicos da Matemática no ensino – aprendizagem das sucessões e tendo em consideração as orientações curriculares, optei por propor aos alunos tarefas de exploração que favorecem o estabelecimento de conexões. Tentei construir as tarefas de modo a despertar curiosidade e entusiasmo, fazendo apelo aos conhecimentos prévios e intuições dos alunos. Tendo em conta as questões do estudo, construi tarefas que englobam várias representações (geométrica, gráfica, analítica, verbal, pictórica). Para compreender quais são as estratégias mais utilizadas pelos alunos na resolução das tarefas, construi tarefas que envolveram conceitos de geometria ou de álgebra, ou os dois interligados. Também elaborei tarefas que têm contextos diferentes mas que conduzem ao mesmo termo geral, com o objectivo de transmitir aos alunos que vários contextos podem conduzir ao mesmo termo geral. Com o intuito de verificar como estabelecem conexões e onde as vão buscar, uma das tarefas propostas requereu a formulação dum problema com base num determinado termo geral duma sucessão.

Como um auxílio importante na elaboração de representações formalizadas no estudo das sucessões e devido às orientações do programa neste tema, a calculadora foi um dos recursos que foi incluído na planificação. Além da calculadora, o manual foi considerado outro recurso importante a utilizar nas aulas. Para uma melhor dinâmica da aula e uma melhor exposição das estratégias elaboradas pelos alunos, outro recurso incluído na planificação foi a utilização de acetatos.

As aulas foram planificadas utilizando a estratégia de ensino – aprendizagem exploratória. Como metodologia de trabalho inclui na planificação o trabalho em pequeno grupo, com intuito de criar ambientes favoráveis ao desenvolvimento da "(…) comunicação matemática (oral ou escrita) (…) meio importante para que os estudantes clarifiquem o seu pensamento, estabeleçam conexões, reflictam na sua aprendizagem (…)" (Silva *et al*, 2002a, p. 11). Optei por planificar as aulas utilizando maioritariamente o trabalho em pequeno grupo, devido à problemática do estudo que me propôs a desenvolver. Pensei que isso permitiu aos alunos discutir estratégias e soluções, argumentar e criticar as ideias dos colegas. Outra razão para planificar as aulas utilizando este modo de trabalho, relaciona-se com as tarefas que construi, que exigiam interacção entre os alunos, acerca das descobertas de conexões e utilização de várias representações. Além deste modo de trabalho, planifiquei uma aula para trabalho a pares, devido à tarefa que exigia participação dos alunos "em dois níveis do discurso da aula – o colectivo e o que desenvolvem com o seu parceiro de aprendizagem" (Ponte *et al*., 1997, p. 94). Outro modo de trabalho que planifiquei para implementar numa das aulas, foi o trabalho individual. Para perceber melhor as dificuldades de cada aluno e as suas necessidades e interesse em estabelecer determinadas conexões, a tarefa que inclui para este modo de trabalho tinha com objectivo apelar à autonomia do aluno e a sua responsabilidade pessoal.

4.4. Tarefas

As tarefas a serem implementadas nas aulas foram construídas considerando os objectivos gerais do Programa de Matemática para o Ensino Secundário e os objectivos específicos da subunidade Sucessões. Foram elaboradas seis tarefas que envolviam problemas e exercícios. Além destas seis tarefas elaborei mais uma, que se destinava ao trabalho a pares durante a aula, mas devido à falta de tempo ficou para ser realizada individualmente em casa. As conexões entre as sucessões e as funções são essenciais em todas as tarefas. A sucessão que está presente, por exemplo na Tarefa 1 (Anexo 1), é a restrição da função de variável real $f(x) = x(x+1), \forall x \in D_f$, ao conjunto IN, ou seja $a_n = n(n+1), \forall n$ ∈IN. A representação gráfica que é abordada nalgumas tarefas, como por exemplo Tarefa 1 (Anexo1) ou Tarefa 3 (Anexo 3), será melhor compreendida estabelecendo conexões com a representação gráfica duma função de variável real. Por exemplo no caso da Tarefa 3 (Anexo 3), se considerar o termo geral da sucessão das área dos sectores circulares $a_n = \frac{1}{2n}$, como sendo duma função de variável real $f(x) = \frac{1}{2x}$, os alunos perceberão rapidamente que o gráfico será uma hipérbole situada nos quadrantes ímpares. Passando para a expressão analítica do termo geral duma sucessão, o gráfico será constituído pelos pontos isolados situados numa parte do ramo da hipérbole do primeiro quadrante, devido ao facto que o domínio é o conjunto IN. No caso das sucessões monótonas Tarefa 4 (Anexo 4), é importante relacionar com as funções. No caso das sucessões temos: se $u_{n+1} > u_n \forall n \in$ IN, então a sucessão é crescente e se $u_{n+1} < u_n \forall n \in$ IN, então a sucessão é decrescente. No caso das funções, uma função f não é necessariamente crescente se $f\ (x+1) > f\ (x), \forall x \in D_f$, e não é necessariamente decrescente se $f\ (x+1) < f\ (x), \forall x \in D_f$, porque não se trata de domínio natural mas de domínio real. Pode-se recorrer à função quadrática, como exemplo para esclarecer graficamente esta situação. No caso das sucessões limitadas, Tarefa 7 (Anexo 7), é importante acentuar que os majorantes e os minorantes duma sucessão são os majorantes e os minorantes do contradomínio da função que a cada valor da variável n, faz corresponder a sua imagem $u(n)$.

As primeiras duas tarefas referem-se essencialmente ao estudo do termo geral das sucessões. A Tarefa 1 (Anexo 1) é constituída por quatro questões. O objectivo desta tarefa e a introdução do conceito de sucessão de números reais e do termo geral. O ponto de partida desta tarefa é a primeira questão, onde é apresentada a sequência dos números rectangulares, representados geometricamente por pontos (representação pictórica). Os alunos podem descrever a figura da ordem pedida, analisando a representação geométrica para identificar a regularidade, ou então relacionando o número de pontos de cada número rectangular com a sua ordem. Esta questão não exige uma representação analítica da sequência, mas uma generalização através duma pequena descrição. Porém, os alunos podem apresentar diversas resoluções utilizando por exemplo o raciocínio por recorrência da seguinte forma:

$$a_1 = 2$$
$$a_2 = 2 \times 3$$
$$a_3 = 2 \times \left(\frac{a_2}{2} + 3\right)$$
$$a_4 = 2 \times \left(\frac{a_3}{2} + 4\right)$$
$$a_5 = 2 \times \left(\frac{a_4}{2} + 5\right)$$
...
$$a_n = 2 \times \left(\frac{a_{n-1}}{2} + n\right) = a_{n-1} + 2n \text{ , para } n > 1$$
...

Desta forma obtêm-se a definição por recorrência dos números rectangulares:

$$(a_n): \begin{cases} a_1 = 2 \\ a_n = a_{n-1} + 2n, \;\; para\; n > 1 \end{cases}$$

O mesmo raciocínio pode conduzir os alunos a elaborar uma expressão analítica para o termo geral da sucessão como se ilustra a seguir.

A sucessão dos números rectangulares é a seguinte: (a_n): 2, 6, 12, 20, 30, 42, 56, …

Temos:

$$a_1 = 2$$
$$a_2 = 2 \times 3$$
$$a_3 = 2 \times (3 + 3)$$
$$a_4 = 2 \times (3 + 3 + 4) = 2 \times (6 + 4)$$
$$a_5 = 2 \times (3 + 3 + 4 + 5) = 2 \times (10 + 5)$$
$$a_6 = 2 \times (3 + 3 + 4 + 5 + 6) = 2 \times (15 + 6)$$
$$a_7 = 2 \times (3 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7) = 2 \times (21 + 7)$$
...
$$a_n = 2 \times (6 + 4 + 5 + 6 + 7 + \cdots + n) = 2 \times \left(6 + \frac{n(n+1)}{2} - (1 + 2 + 3)\right) =$$

$$= 2 \times \left(6 + \frac{n(n+1)}{2} - 6\right) = 2 \times \frac{n(n+1)}{2} = n(n+1)$$

...

Desta forma obtêm-se o termo geral da sucessão dos números rectangulares que é

$$a_n = n(n+1), \forall n \in \mathrm{IN}$$

A segunda questão divide-se em duas partes. Na primeira, os alunos devem deduzir o termo geral da sequência dos números rectangulares, relacionando a ordem com o valor correspondente do número rectangular. Na segunda parte, os alunos devem explorar se o número indicado é ou não rectangular. Nesta parte pode-se observar com que conceitos os alunos estabelecem conexões para concluir a questão. Na questão três, os alunos devem construir graficamente a correspondência entre a ordem e a figura, para depois, concluir na questão quatro se esta correspondência representa ou não uma função. A partir desta questão será introduzido o conceito de sucessão real. A Tarefa 2 (Anexo 2) tem duas versões e cada uma inclui também quatro questões. Administrada em duas versões, procurou-se evidenciar com esta tarefa que diversos contextos podem originar a mesma sucessão e uma sucessão pode dar origem às várias expressões equivalentes entre elas.

Na primeira questão, os alunos podem analisar a transformação que ocorre de uma figura para a figura seguinte, ou podem explorar as relações entre a ordem de uma figura da sucessão e o número de objectos que a constitui. Na segunda questão, os alunos devem generalizar a situação proposta até chegarem à representação analítica da sucessão. Os passos que os alunos percorrem para generalizar a situação são importantes para perceber que representações utilizam os alunos e como estabelecem conexões entre elas. A terceira questão foi construída com o objectivo de levar os alunos a concluir que uma sucessão pode dar origem a várias expressões analíticas equivalentes entre elas. Para além disso, verificando a existência de várias expressões analíticas para mesma sucessão, e dada oportunidade aos alunos para reflectirem sobre as suas equivalências e sobre as operações a efectuar para provar essa conjectura. Nesta questão, os alunos têm possibilidade de estabelecer conexões com conteúdos já estudados no tópico Funções, ou com outros conteúdos matemáticos. Também podem descobrir a regra de formação da sucessão por meio de uma descrição em linguagem natural. Na quarta questão, os alunos são confrontados com uma expressão analítica para o termo geral duma sucessão a partir da qual devem construir um problema. Esta questão permite perceber com que dificuldades se confrontam os alunos na compreensão do conceito de sucessão em especial o domínio, contradomínio, termo geral entre os outros.

A Tarefa 3 (Anexo 3), constituída por duas questões, tem como objectivo principal a introdução da definição por recorrência duma sucessão. Outro objectivo da mesma tarefa é a exploração da calculadora para perceber melhor o comportamento dos termos das sucessões dadas. Este recurso à calculadora poderá ajudar os alunos no processo de descoberta da expressão, para o termo geral da sucessão dos números triangulares. A primeira questão contém três sucessões para analisar. Uma delas é a sucessão dos números triangulares e outra, a sucessão de Fibonacci. Na segunda questão, para encontrar o termo geral dos números triangulares, os alunos podem estabelecer conexões entre os números quadrados e triangulares, entre os números rectangulares e os triangulares, recorrendo à representação numérica ou geométrica. Também podem explorar a relação entre a ordem e o número de bolas que tem o respectivo número triangular. Ainda podem recorrer a uma descrição verbal do processo de construção da sucessão. A segunda questão é construída de forma a conduzir os alunos à conclusão que nem sempre é fácil (ou possível) encontrar uma expressão analítica do termo geral de uma sucessão, como é o caso da sucessão de Fibonacci. No entanto, os alunos vão perceber que isso não significa que não seja possível caracterizar a sucessão. Os alunos podem tentar obter os termos da sucessão à custa dos anteriores, utilizando a linguagem corrente ou simbólica, chegando desta forma, à definição por recorrência. Na mesma questão é pedida a construção dos gráficos das sucessões. Estes podem ser construídos utilizando a calculadora, a expressão do termo geral, a definição por recorrência ou construção directa ponto por ponto utilizando a correspondência entre a ordem e a representação numérica da sucessão.

Com a Tarefa 4 (Anexo 4) inicia-se o estudo da monotonia duma sucessão. A tarefa foi elaborada para trabalho a pares, uma vez que a mesma proporciona uma certa margem de autonomia. Trabalhando a pares e participando na discussão em grande grupo, os alunos devem examinar os três exemplos incluídos na tarefa, que seriam projectadas no quadro interactivo. Esta é uma tarefa onde os alunos podem construir conexões com as propriedades das funções. Os primeiros dois exemplos apelam à intuição. Os alunos podem estabelecer conexões entre a representação geométrica e numérica ou simplesmente analisar as figuras, para conclusões sobre a monotonia da sucessão. Quanto ao terceiro exemplo, os alunos podem-se enganar, utilizando a enumeração de alguns termos. Para concluir se a sucessão é ou não monótona, uns alunos podem recorrer ao gráfico da sucessão, enquanto outros podem analisar um variado conjunto dos termos da sucessão, dando diferentes valores à variável natural.

A Tarefa 5 (Anexo 5) que foi dada para trabalho de casa, permite a construção de sucessões utilizando várias representações. Com esta tarefa pode-se verificar qual a representação mais utilizada pelo aluno para representar uma sucessão e que conexões estabelece para chegar à resposta.

A Tarefa 6 (Anexo 6) é pouco vulgar para os alunos devido à modalidade de realização. É um Ditado Matemático. Constituída por nove questões, de resposta rápida, nas primeiras seis, os alunos devem indicar o termo geral da sucessão e concluir se é ou não monótona. As sucessões nesta parte do ditado, são representadas por enumeração dos termos, verbalmente e geometricamente. Um dos objectivos é verificar se os alunos conseguem construir as expressões analíticas das sucessões, utilizando várias representações e se conseguem utilizar estas representações para concluir sobre a monotonia das sucessões apresentadas. Outro objectivo é verificar com que conceitos estudados estabelecem conexões para apresentar o termo geral. As outras três questões exigem exemplos de sucessões, em que os alunos podem utilizar figuras, símbolos, gráficos ou outras representações. O objectivo destas últimas questões é verificar que raciocínios utilizam os alunos, como os apresentam e a que representações apelam para dar resposta.

Por último, a Tarefa 7 (Anexo 7), tem com objectivo a introdução dos conceitos de sucessão limitada, majorantes e minorantes. O objectivo principal desta tarefa é observar como os alunos estabelecem conexões com conceitos estudados anteriormente e de que forma conseguem generalizar as ideias matemáticas utilizadas. A tarefa é constituída por duas questões. Estas duas questões baseiam-se no método utilizado pelo Arquimedes (287-212 a.C.) para obter as aproximações do π por defeito e por excesso.

Segue uma breve explicitação sobre como o Arquimedes investigou o valor do π através das aproximações.

Se a circunferência unitária tem perímetro p e o círculo unitário tem área a, então a circunferência de raio r tem perímetro pr e o círculo de raio r tem área ar^2, sendo r razão entre os perímetros e r^2 razão entre as áreas. Assim, a constante p permite calcular o perímetro de qualquer circunferência e a constante a permite calcular a área de qualquer círculo, em função do seu raio.

Arquimedes (287 – 212 a.C.), o grande matemático grego da antiguidade, foi o primeiro a provar que as duas constantes p e a satisfazem a simples relação: $p = 2a$ Esta relação, muito provavelmente já conhecida antes de Arquimedes, pela nossa definição de π, implica que $p = 2\pi$ e, portanto, $a = \pi$. No entanto, os gregos não usavam fórmulas nem equações, pelo que para eles o número π era a razão entre áreas de círculos e respectivos raios ao quadrado.

O método que Arquimedes usou para provar que $p = 2a$ é bastante simples e baseia-se no método da exaustão.

Imagine-se um círculo unitário dividido num grande número de fatias iguais feitas com cortes radiais desde o centro, como por exemplo na figura (a).

(a) Um círculo dividido em 32 fatias iguais

(b) Cada fatia é praticamente um triângulo

A área desse círculo é trinta e duas vezes a área de uma fatia. Cada fatia, por sua vez, é quase um triângulo com altura 1 e base $\frac{p}{32}$, como sugerido na figura (b). A área de cada triângulo é um meio da base vezes a altura, ou seja, $\frac{p}{64}$. A área do círculo é então trinta e duas vezes maior, ou seja, $\frac{p}{2}$. Por outras palavras, através da aproximação de cada fatia pequena por um triângulo, vemos que a se aproxima de $\frac{p}{2}$.

Arquimedes estimou o erro feito na aproximação da área de cada fatia respectivamente, pela área do triângulo inscrito e do triângulo circunscrito na circunferência. Esta diferença diminui quando o número de fatias aumenta e Arquimedes, usando um raciocínio por redução ao absurdo, conclui então que o erro se aproxima de zero à medida que o número de fatias se torna arbitrariamente grande, demonstrando assim que $a = \frac{p}{2}$.

Arquimedes baseou-se ainda no método de exaustão, para calcular uma aproximação de π , utilizando um polígono regular de 96 lados.

A aproximação obtida foi: $\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$ (Apostol, 2000).

Nesta tarefa os alunos vão utilizar este raciocínio para polígonos regulares de 180 lados, com recurso à calculadora.

Na primeira questão os alunos devem determinar o termo geral e o comportamento da sucessão das áreas dos polígonos inscritos numa circunferência de raio 1 e, na segunda questão, determinar o termo geral e o comportamento da sucessão das áreas dos polígonos circunscritos na mesma circunferência. Esta tarefa requer que os alunos recordem conceitos de trigonometria, relações entre ângulos e lados dum polígono regular de $\boldsymbol{n}$ lados. Utilizando a expressão para o valor exacto da área no caso do polígono de 3 lados, os alunos devem descobrir a lei de formação para um polígono regular de $\boldsymbol{n}$ lados. Observando o comportamento da sucessão, os alunos devem apresentar conclusões acerca das aproximações das áreas. Estas conclusões podem evidenciar que tipo de conexões os alunos construíram e como explicitaram as estratégias escolhidas para as conclusões feitas.

As tarefas propostas aos alunos foram apresentadas em suporte papel, onde deveriam ser escritas as respostas e a explicitação dos raciocínios, e das estratégias elaboradas e aplicadas. As tarefas propostas, na sua maioria, foram de cunho exploratório. Nas aulas e para trabalho de casa foram exploradas algumas tarefas do manual, sendo na sua maioria exercícios e problemas.

No que respeita à avaliação, foi tido em conta a participação dos alunos no trabalho de grupo, trabalho individual e em pares incluindo a participação na discussão. No decorrer das aulas foi possível observar o empenho de cada aluno nas tarefas propostas. A realização dos trabalhos de casa também foi objecto de avaliação. O objectivo das tarefas propostas para trabalhos de casa foi de verificar as dificuldades que os alunos apresentam e as suas dúvidas.

As sete tarefas propostas são compostas em média por quatro questões. A maior parte destas questões foram adaptadas com base nos manuais do 11.º ano, sendo a Tarefa 7 (Anexo 7), retirada e adaptada de http://illuminations.nctm.org/. Primeiro passo no processo de construção das tarefas foi a recolha de itens, a partir das fontes citadas. Os itens foram escolhidos de forma a englobar questões que relacionam várias representações de sucessões. Seguidamente reformulei alguns deles e comecei a construção das tarefas. As tarefas foram construídas, tentando variar a ordem da apresentação ao nível de representações, até constituírem um conjunto diversificado. Na elaboração das tarefas, fui apoiada pela professora da turma e pelas minhas orientadoras.

A representação geométrica está contida em todas as tarefas, com o objectivo de verificar de que forma os alunos usam esta representação e que tipos de conexões estabelecem para chegarem à representação analítica. Atendendo o facto que uma das questões do estudo refere-se à abordagem da representação analítica, em cinco das tarefas esta representação foi presente. No seu conjunto todo, as tarefas englobam a representação geométrica, analítica, verbal, numérica e gráfica. Embora a representação gráfica não seja presente em todas as tarefas, ela foi abordada várias vezes pelos alunos durante a realização das tarefas para testar e verificar conjecturas.

4.5. Planificação

O principal objectivo deste estudo de cariz investigativo é estudar o papel das conexões entre vários tópicos da Matemática na aprendizagem das sucessões. As 7 tarefas elaboradas e descritas anteriormente, que serviram como base para desenvolver o meu estudo, encontram-se em anexo (Anexo 1-7). Estas foram exploradas durante seis blocos de 90 minutos, cujas planificações se encontra também em anexo (Anexo 8-13). A concretização das aulas para desenvolver o estudo teve início a 14 de Abril de 2010 e prolongou-se até dia 23 de Abril do mesmo ano. Cada tema foi trabalhado, procurando ir ao encontro das dificuldades manifestadas pelos alunos, sempre com o objectivo de dar respostas às questões da problemática do estudo a desenvolver. Durante a sua concretização, a planificação sofreu algumas alterações, principalmente no que se refere ao tempo previsto para o desenvolvimento de algumas tarefas. Esta necessidade surgiu do grande empenho manifestado pelos alunos em diversas situações e das dificuldades apresentadas na exploração das tarefas.

O Quadro 1 apresenta uma planificação das tarefas exploradas integradas no estudo, considerando o modo de trabalho em cada aula.

Subtema	Tarefas	Objectivos	Forma de trabalho	Calendarização
1. Definição de sucessão de números reais. Termo geral. Representação gráfica.	**Tarefa 1**	• Definir sucessão de números reais; • Compreender e utilizar a linguagem e nomenclatura própria das sucessões; • Calcular termos de uma sucessão definida pelo termo geral ou pela numeração de alguns termos; • Investigar se um dado valor faz parte do conjunto dos termos de uma sucessão; • Representar graficamente a sucessão.	Em pequeno grupo (3 ou 4 alunos)	14-04-2010
2. Resolução de problemas.	**Tarefa 2**	• Resolver problemas de vários contextos; • Utilizar a linguagem e nomenclatura própria das sucessões; • Determinar o termo geral duma sucessão; • Identificar vários contextos para definir uma sucessão; • Identificar diferentes expressões para o termo geral duma sucessão.	Em pequeno grupo (3 ou 4 alunos)	16-04-2010
3. Modos de definir sucessões	**Tarefa 3**	• Estudar sucessões definidas de diferentes formas; • Utilizar a linguagem e nomenclatura própria das sucessões; • Determinar o termo geral da sucessão; • Definir uma sucessão por recorrência; • Utilizar a calculadora para o estudo das sucessões.	Em pequeno grupo (3 ou 4 alunos)	19-04-2010
4. Sucessões monótonas.	**Tarefa 4** **Tarefa 5**	• Estudar monotonia duma sucessão; • Saber demonstrar analiticamente se uma sucessão é monótona; • Construir sucessões monótonas; • Utilizar a linguagem e nomenclatura própria das sucessões; • Utilizar a calculadora para o estudo das sucessões.	Em pares (Tarefa 4) Individual para trabalho de casa (Tarefa 5)	21-04-2010

5. Resolução de problemas sobre sucessões monótonas e não monótonas.	**Tarefa 6**	• Desenvolver a capacidade de cálculo mental; • Compreender e utilizar a linguagem e nomenclatura própria das sucessões; • Determinar o termo geral da sucessão; • Calcular termos de uma sucessão definida pelo termo geral ou pela numeração de alguns termos; • Investigar se um dado valor faz parte do conjunto dos termos de uma sucessão; • Identificar sucessões monótonas e não monótonas. • Resolver problemas de diversos contextos.	Individual	22-04-2010
6. Sucessões limitadas.	**Tarefa 7**	• Estudar sucessões monótonas e não monótonas limitadas; • Introdução dos conceitos de majorante e minorante da sucessão; • Utilizar a linguagem e nomenclatura própria das sucessões; • Determinar o termo geral de uma sucessão.	Em pequeno grupo (3 ou 4 alunos)	23-04-2010

Quadro 1 – Planificação da subunidade de ensino

4.5. Descrição sumária das aulas realizadas

Apresento de seguida, uma descrição sucinta das aulas leccionadas, procurando explicar em que medida considero que os objectivos específicos das mesmas foram atingidos. No caso de se verificarem alguns desvios relativamente à planificação, será apresentada a respectiva justificação.

A primeira aula foi leccionada em 14 de Abril, e teve a duração de 90 minutos. Os objectivos específicos desta aula consistiram em definir sucessões de números reais, compreender e utilizar a linguagem e nomenclatura própria das sucessões, representar graficamente uma sucessão, calcular os termos da sucessão definida pelo termo geral e determinar se um dado valor é termo da sucessão.

Esta aula foi realizada na maior parte, tal como foi planificada. Não foi feita a resolução dos exercícios do manual incluídos na planificação, por falta de tempo.

Durante a aula, os alunos realizaram a Tarefa 1 (Anexo 1) onde mostraram um grande envolvimento. Na primeira questão os grupos elaboraram várias estratégias para determinar os números rectangulares pedidos. Dois dos grupos relacionaram as figuras geométricas para determinar o número de bolas da sexta e sétima figura, relacionando em cada uma as dimensões dos lados construído por pontos. Os restantes quatro, determinaram os termos pedidos, contando o número de bolas de cada figura, entre estes, um elaborando um raciocínio por recorrência. Relativamente à segunda questão, os alunos deduziram sem dificuldades a expressão para o número de bolas de qualquer figura. Para a segunda parte desta questão, os alunos determinaram bem a ordem do número rectangular dado, mas nem todos justificaram porque é que o valor negativo da variável ***n*** não era solução do problema. Um dos grupos justificou dizendo que o valor negativo não entra, porque "no contexto do problema não pode haver números negativos", enquanto outro grupo concluiu que os valores negativos não entram porque "não há ordens negativas". Esta questão foi discutida em grande grupo, em que os alunos tiraram as conclusões acerca do valor que pode ser atribuído á variável natural ***n***. Os alunos aprenderam que tratando-se da ordem, essa pode ter só valores naturais. Esta parte da discussão serviu para correcção da representação gráfica construída erradamente pelos grupos na terceira questão e para corrigir as conclusões tiradas na caracterização da sucessão como função de variável natural. O gráfico construído pelos alunos apresentava a parte da parábola com valores positivos tanto dos objectos, como das imagens, sendo este construído por uma curva contínua. Na discussão em grande grupo, pedi a uma aluna para me mostrar o objecto cuja imagem é um ponto qualquer do gráfico, sem ser um número natural. Encontrando o objecto, correspondente à aquela imagem e que não tinha valor natural, os alunos perceberam que o domínio da correspondência construída é o conjunto dos números naturais. Um dos grupos concluiu que o domínio da correspondência é o conjunto dos números naturais, mas não conseguiu estabelecer conexões entre o domínio e a representação gráfica. Com esta tarefa os alunos aprenderam o conceito de sucessão, sendo esta uma função de variável natural e o contradomínio contido em IR.

A discussão em grande grupo foi bem gerida, sendo a gestão de tempo menos conseguida. Contudo, considero que os objectivos da aula foram atingidos e os alunos realizaram novas aprendizagens.

A segunda aula leccionada a 16 de Abril, com a duração de 90 minutos, teve como objectivos específicos resolver problemas de vários contextos, determinar o termo geral duma sucessão e determinar várias expressões analíticas para o mesmo. Nesta aula procurou-se também identificar vários contextos para definir uma sucessão.

Os alunos resolveram os problemas da Tarefa 2 (Anexo 2), elaborando várias estratégias de resolução. Conseguiram perceber que vários contextos podem dar origem a uma mesma sucessão e que uma dada sucessão pode ser definida por várias expressões analíticas, que são equivalentes entre elas. Na segunda questão da tarefa os alunos apresentaram duas expressões diferentes para os problemas propostos que davam origem a sucessão: $1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, \ldots$.

$a_n = 2^{n-1}$ 2.2. $a_n = \frac{2^n}{2}$

Na terceira questão os grupos conseguiram elaborar várias expressões para as sucessões propostas. Assim, para a sucessão: $1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots$ apresentaram as seguintes expressões para o termo geral.

$a_n' = (-1)^{n-1}$ $(-1)^n \times (-1)$

$$\begin{cases} n^0, \text{ se } n \text{ for ímpar} \\ -n^0, \text{ se } n \text{ for par} \end{cases}$$

Pode-se verificar neste exemplo, que os alunos construíram as expressões a partir dos conceitos já estudados e estabeleceram conexões com as funções definidas por ramos.

Um dos grupos apresentou outra expressão que ilustra o raciocínio por recorrência aplicado.

$$b_n \times (-1) = b_{(n+1)}$$

Não tendo conhecimentos necessários para definir uma sucessão por recorrência o grupo não indicou o primeiro termo e o valor da variável n para qual esta expressão se verifica.

Estas expressões foram discutidas em grande grupo, e foi acentuada a ideia de que se podem elaborar outras expressões que geram a mesma sucessão.

Para a sucessão: $0, 0, 0, 0, \ldots$ os grupos apresentaram as seguintes expressões analíticas, verificando-se a preocupação dos alunos em introduzir a variável natural ***n*** nos termos gerais.

$$\frac{0}{n}$$

$$0n \; , \; n-n \; , \; 0$$

Para a sucessão: $\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -1, \ldots$ os alunos não conseguiram determinar nenhuma expressão analítica. Porém, um dos grupos conseguiu relacionar esta sucessão com as funções trigonométricas e apresentou uma tentativa de construção do termo geral.

$a_n =$ sen $30°$ ou cos $30°$

Quanto à quarta questão, onde os alunos deveriam construir um problema a partir duma expressão analítica dada, verificou-se que os mesmos tiveram dificuldades em elaborar bons problemas. Nos problemas construídos os alunos não tiveram em consideração que o domínio duma sucessão é um conjunto infinito e que a ordem duma sucessão é um valor natural. Verificou-se ainda que o contexto dalguns problemas não era o mais real possível, não se considerando que a regularidade se deve manter para se verificar o termo geral estabelecido. O único contexto que foi melhor conseguido é apresentado a seguir.

> à uma sucessão de termo geral **4n**.
>
> A professora pergunta ao Joãozinho a expressão geral dos múltiplos de 4. Ajuda-o a encontrar esta expressão. Sabes qual é?
>
> $4n-4=4(n-1)$

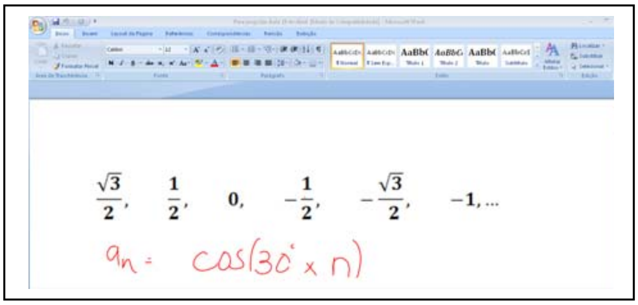
O registo a vermelho foi feito na aula a seguir, na qual os alunos perceberam que o termo geral para esta situação seria $4n-4$ e não $4n$. Assim, o zero que é múltiplo de qualquer número também fazia parte da expressão.

A aula decorreu tal como se planificou, tirando a minha intervenção no início da aula. Depois de dar aula, analisando como decorreu, percebi que a intervenção no início da aula foi desnecessária. Generalizei a estratégia elaborada por um dos grupos na aula anterior, para calcular os números rectangulares. Com isso, quis evidenciar que uma dada sucessão pode ter várias expressões para o termo geral que são equivalentes, conclusão que os alunos tirariam na realização da Tarefa 2 (Anexo 2), proposta nesta aula. Na parte da discussão, consegui apresentar as resoluções dos grupos, mas a ordem de apresentação não foi muito bem conseguida. Assim, perdi algum tempo para mostrar mesmas estratégias de resolução, em vez de dar mais ênfase aos diferentes raciocínios elaborados. Tirando estas observações sobre os momentos menos conseguidos nesta aula, considero que o objectivo da aula foi atingido.

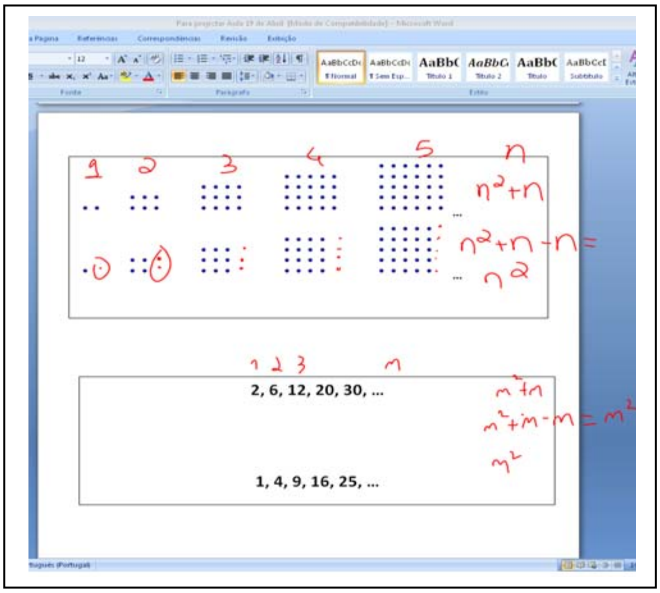
Com a terceira aula, leccionada a 19 de Abril, com duração de 90 minutos, pretendia-se introduzir a definição por recorrência da sucessão, estudar sucessões definidas de diferentes formas e utilizar a calculadora para o estudo de sucessões.

Iniciei a aula retomando os problemas construídos pelos alunos, que foram projectados no quadro interactivo. Optei por analisar cada problema, com o intuito de evidenciar os erros cometidos e as devidas alterações que se poderiam fazer nalguns casos, para que o problema correspondesse a uma sucessão de termo geral dado.

A seguir foi apresentada uma expressão encontrada por alguns alunos da turma referente à sucessão: $\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -1, \ldots$ cujo termo geral não foi determinado na aula anterior. Assim, um aluno foi ao quadro e apresentou a seguinte expressão.

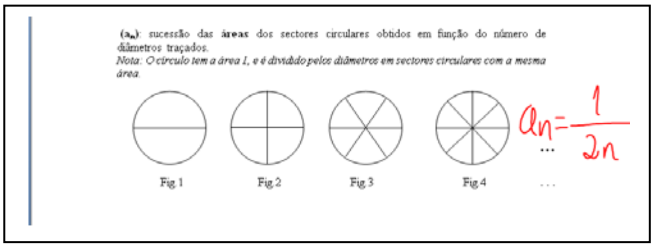


Foi também retomado o problema dos números quadrados resolvido na aula passada, com intuito de estabelecer ligação entre os números rectangulares e os números quadrados. Foi lançada a pergunta: como a partir da representação geométrica dos números rectangulares se pode obter a expressão analítica dos números quadrados? O mesmo foi pedido com a representação numérica. No quadro interactivo foram comentados os seguintes registos feitos pelos alunos.



Deste modo, os alunos relacionaram os números quadrados com os números rectangulares, chegando à conclusão que esta forma de determinar o termo geral para os números quadrados é diferente das outras analisadas na aula passada.

Em continuação da aula, os alunos começaram a resolução da Tarefa 3 (Anexo 3). Para a sucessão das áreas, os alunos encontraram algumas dificuldades na interpretação do enunciado. Alguns grupos em vez de indicar o termo geral para a sucessão das áreas dos sectores circulares, determinaram o termo geral para o número de sectores circulares. Circulando pelos grupos, pedi aos alunos para lerem bem o enunciado. A observação feita contribuiu para que os alunos conseguissem determinar o termo geral correctamente. No quadro interactivo foi registado o seguinte.

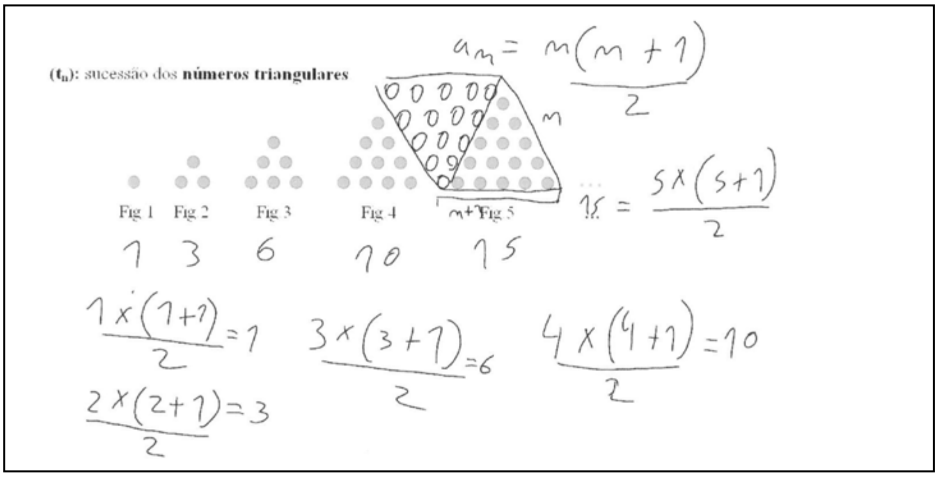


A aula aproximava-se do fim, não conseguindo continuar a discussão para as seguintes sucessões, dos números triangulares e de Fibonacci. Sendo assim, pedi aos alunos para tentarem em casa elaborar várias estratégias para determinar o termo geral das sucessões não discutidas.

Devido às correcções feitas nos problemas e ao facto de retomar alguns assuntos da aula passada, as resoluções dos alunos referentes à Tarefa 3 (Anexo 3), não foram analisadas na discussão em grande grupo. Apesar de haver um bom envolvimento dos alunos na realização da tarefa, considero que os objectivos da aula não foram atingidos.

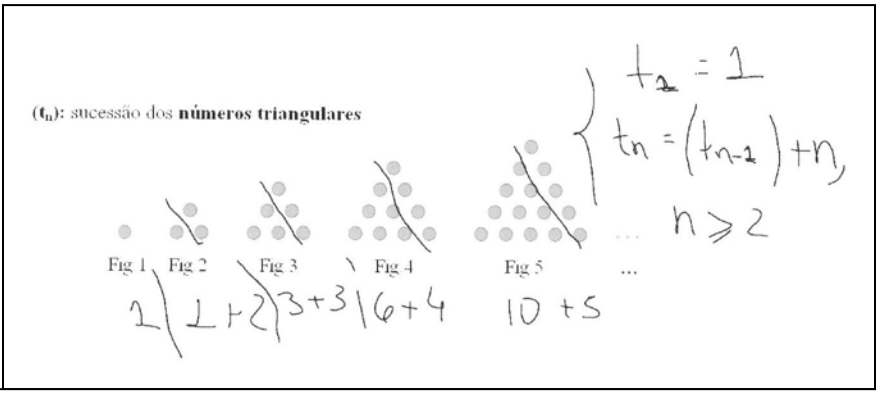
Na quarta aula leccionada a 21 de Abril, com a duração de 90 minutos, retomando a Tarefa 3 (Anexo 3), consegui atingir os objectivos propostos na aula anterior.

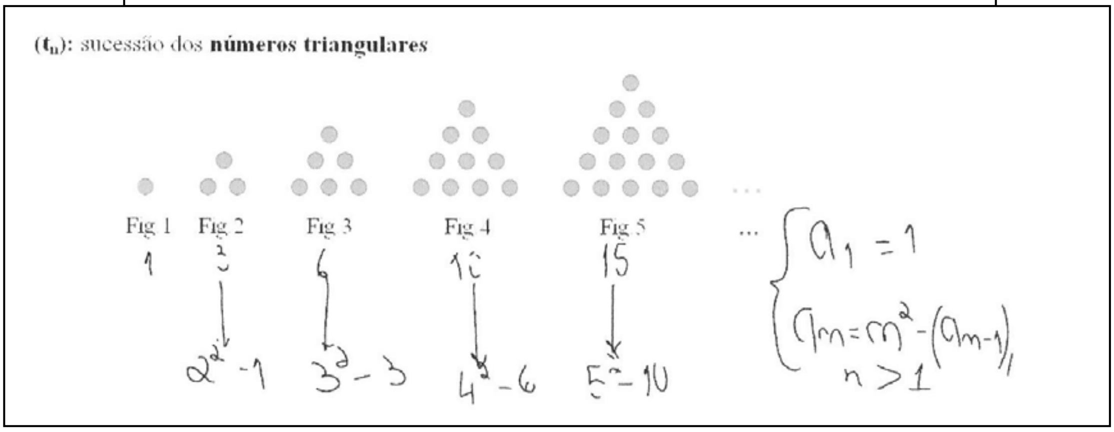
Para a sucessão dos números triangulares, um dos grupos apresentou a expressão para o termo geral, ilustrando a estratégia elaborada como se vê na figura.



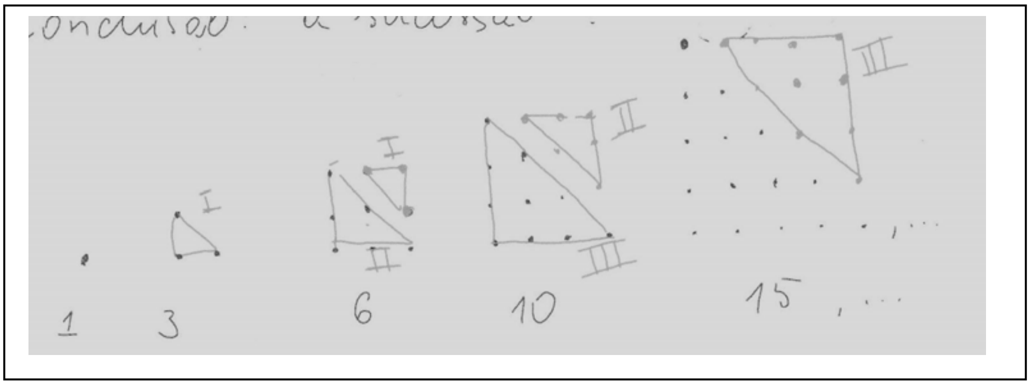
Outro grupo que construiu a mesma expressão analítica, justificou dizendo: "numa outra tarefa, uma das sucessões tinha o termo geral $n(n+1)$. Então eu tentei ver se dá, e vi que verificava-se se dividir esta expressão por dois, assim cheguei ao termo geral da sucessão (t_n) , que é $t_n = \frac{n(n+1)}{2}$ ".

Outros grupos não conseguiram uma expressão para o termo geral e elaboraram expressões que se baseiam no raciocínio por recorrência. Estas expressões foram registadas no quadro.

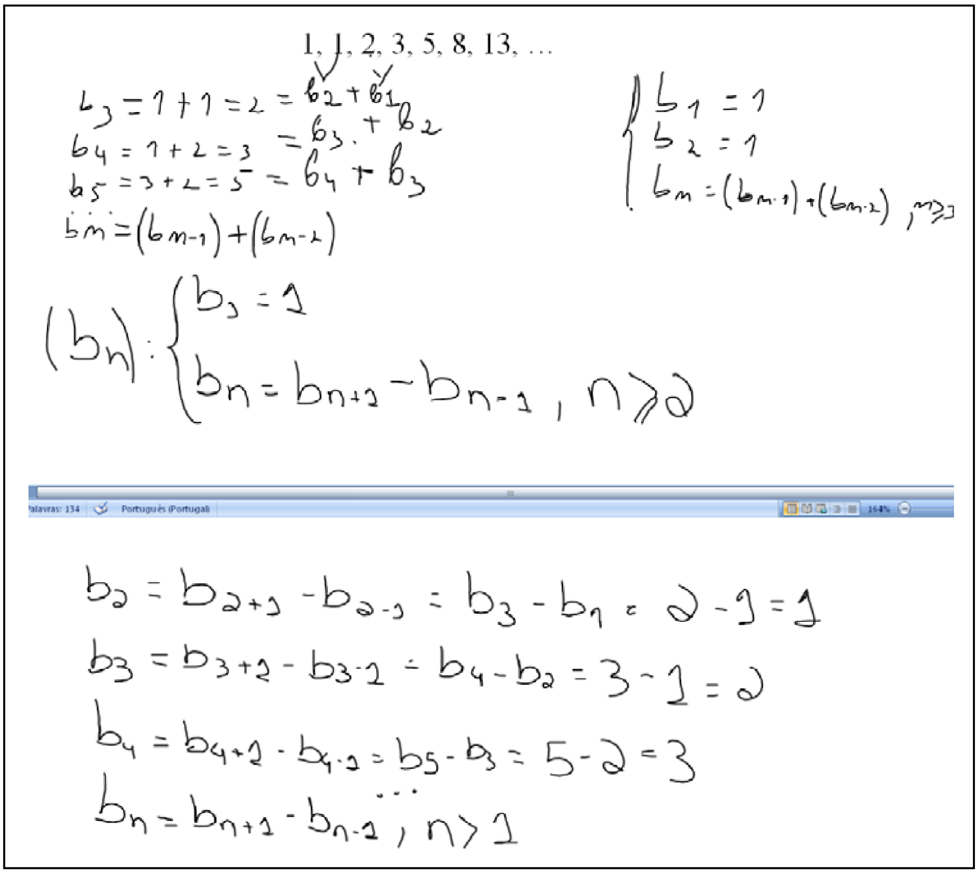




Na aula seguinte pedi à turma para pensarem como se pode ilustrar geometricamente a última expressão. Passados alguns minutos, um aluno da turma pediu para ir ao quadro e mostrou a seguinte ilustração geométrica da última definição por recorrência.



Para a sucessão de Fibonacci, os alunos apresentaram as seguintes expressões que ilustram diferentes modos de raciocínio, o primeiro grupo define a sucessão utilizando os termos anteriores e o segundo grupo define a sucessão utilizando um termo anterior e outro que é a seguir.



Apresentadas estas resoluções foi introduzido o novo conceito de definição por recorrência de uma sucessão. Foram evidenciadas na discussão as vantagens e as desvantagens da definição por recorrência e do termo geral. A utilização da calculadora não foi enfatizada, entretanto observei que os alunos começaram a explorar as potencialidades da calculadora referente às sucessões.

Esta aula tinha com objectivo estudar as sucessões quanto à monotonia e aprender a demonstrar analiticamente se uma dada sucessão é ou não monótona. A Tarefa 4 (Anexo 4) elaborada para trabalho em pares e que foi projectada no quadro, foi construída com este intuito.

Sem grandes dificuldades e com apoio às representações geométricas, os alunos concluíram correctamente a monotonia das sucessões dos primeiros dois exemplos. No terceiro exemplo, com apoio na representação numérica, concluíram erradamente que a sucessão é monótona decrescente. Recorrendo à representação gráfica, perceberam que tinham errado.

Expliquei a seguir, como se verifica analiticamente a monotonia duma sucessão tomando como exemplo a sucessão dos números ímpares. Os alunos conseguiram na aula demonstrar analiticamente a monotonia da sucessão para o Exemplo 2 da Tarefa 4 (Anexo 4) sendo registada no quadro a demonstração.

a): $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \ldots, \frac{1}{2n}, \ldots$

$$a_{n+1} = \frac{1}{2(n+1)} = \frac{1}{2n+2}$$

$$a_n = \frac{1}{2n}$$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n} = \frac{(2n)}{(2n)} \times \frac{1}{2n+2} - \frac{(2n+2)}{(2n+2)} \times \frac{1}{2n}$$

$$= \frac{2n}{4n^2+4n} - \frac{2n+2}{4n^2+4n} = \frac{\cancel{2n} - \cancel{2n} - 2}{4n^2+4n} = \frac{-2}{4n^2+4n}$$

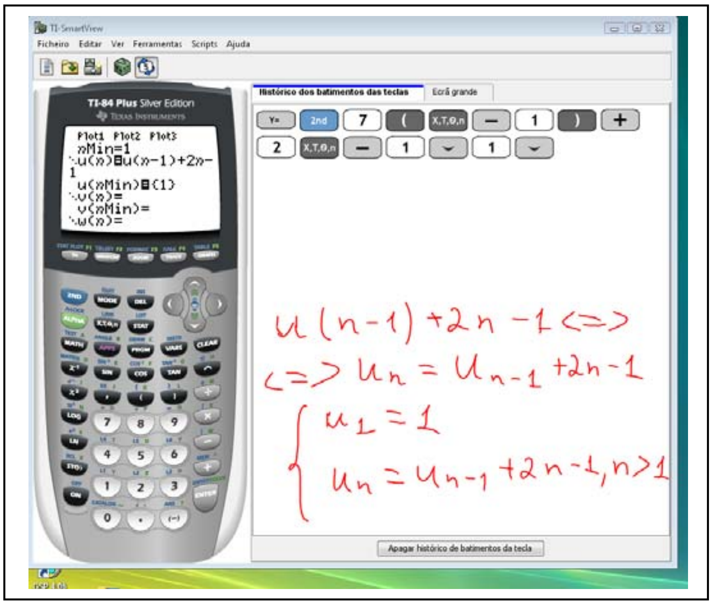
$$\frac{-2}{4n^2+4n} < 0, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Os alunos, a seguir concluíram que esta sucessão é monótona decrescente, porque a diferença entre um termo e o seu anterior é negativa para qualquer valor da variável natural ***n***. Deste modo, os alunos confirmaram a resposta que deram sobre a monotonia da mesma sucessão pela representação geométrica e numérica. O tempo não me permitiu que se realizasse na aula uma demonstração analítica duma sucessão não monótona, nem se conseguiu a realização a pares da Tarefa 5 (Anexo 5), que foi dada para trabalho de casa. Na planificação tinha pensado fazer uma comparação mais detalhada com a monotonia das funções, assunto que não foi conseguido nesta aula. Deste modo, considero que os objectivos da aula foram parcialmente atingidos. Em geral, os alunos trabalharam bem, com um bom ritmo, conseguindo aprender novos conceitos e uma variedade de expressões para as sucessões examinadas.

A aula de 22 de Abril, com a mesma duração que as outras, teve com objectivo específico desenvolver a capacidade de resolver problemas e exercícios referentes às sucessões e verificar os conhecimentos apreendidos.

Comecei a aula com um processo analítico do estudo da monotonia duma sucessão que não era monótona, assunto que ficou pendente, da aula precedente. A sucessão escolhida tinha como termo geral: $(-1)^n \times (-2)$. Esta demonstração gerou alguma agitação entre os alunos, devido às transformações algébricas que foram feitas para simplificar a diferença entre um termo e o seu anterior. Com alguma dificuldade, os alunos conseguiram entender estas transformações, lançando perguntas e sugestões.

Foi evidenciada a ideia que uma função pode ser monótona crescente num dado intervalo e por exemplo monótona decrescente noutro. Para as sucessões podemos concluir que uma determinada sucessão ou é monótona crescente, ou é monótona decrescente, ou não é monótona para qualquer valor natural da variável ***n***, não se podendo falar em intervalos de monotonia. Foi discutida ainda a demonstração geométrica da definição por recorrência dos números triangulares da qual já falei na descrição da aula passada. A seguir os alunos realizaram individualmente a Tarefa 6 (Anexo 6), que foi projectada no quadro. À medida que eu passava as páginas num ficheiro Word, os alunos respondiam às questões, não podendo voltar à página anterior. Nesta tarefa a utilização dos cadernos diários, foi permitida. Para as questões 1 – 6 desta tarefa, foram disponibilizados 1 a 2 minutos, enquanto para as questões 7 – 9, foram dados 5-7 minutos. A seguinte etapa da aula foi a resolução de exercícios do manual. Os exercícios resolvidos foram sobre a monotonia de sucessões. Foi enfatizada nesta aula a utilização da calculadora. Na aula anterior foi distribuída aos alunos uma ficha informativa sobre o uso da calculadora, que os ajudou no trabalho com este recurso. No quadro também foi projectado um programa com a simulação da calculadora. Deste modo, todas as dúvidas dos alunos, que foram muitas, foram esclarecidas através deste recurso. Uma das dúvidas dos alunos foi na escrita das expressões para a definição por recorrência. Um dos registos feitos no quadro foi o seguinte.

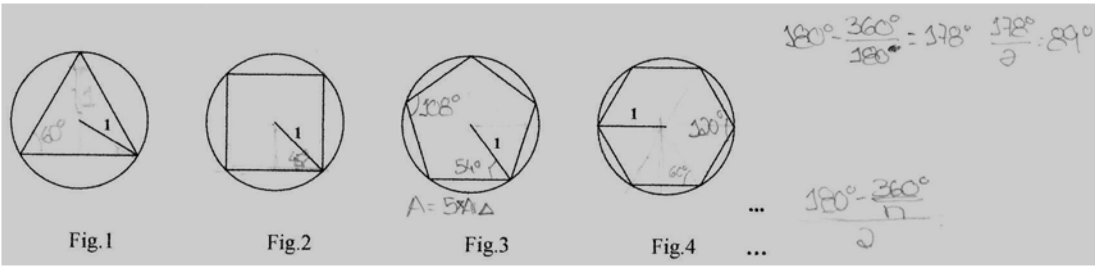


A aula aproximava-se do fim, não conseguindo realizar todos os exercícios planeados. Embora não conseguindo realizar tudo como foi planificado, considero que os objectivos da aula foram alcançados.

Aprendi com esta aula que o processo analítico para demonstrar monotonia duma sucessão é benéfico no caso das sucessões monótonas crescentes e decrescentes. No caso duma sucessão não monótona, uma vez que se encontra um contra exemplo que mostra a não monotonia duma sucessão, não é necessária a demonstração analítica.

A última aula, que se realizou a 23 de Abril, com duração de 90 minutos, teve como objectivo a introdução dos conceitos de majorantes, minorantes e limitação duma sucessão. A grande parte da aula foi a realização em grupo, da Tarefa 7 (Anexo 7), composta por duas questões.

Iniciei a aula com a escrita no quadro da fórmula de cálculo da amplitude do ângulo de um polígono regular de ***n*** lados, com intuito de facilitar os cálculos que os alunos teriam de fazer na realização da tarefa. Circulando pelos grupos, observei na primeira questão da tarefa, que os alunos começaram a rever conceitos de trigonometria do triângulo, área do triângulo, ralação entre os lados e ângulo, tipos de triângulos, soma dos ângulos num triângulo, entre os outros. Os alunos fizeram alguns cálculos, construções suplementares, para determinar as áreas exactas dos polígonos regulares circunscritos a uma circunferência. Tudo isso foi feito com o objectivo de relacionar as áreas dos novos polígonos com a expressão dada para a área do triângulo. Eis aqui alguns dos registos dos trabalhos dos grupos.



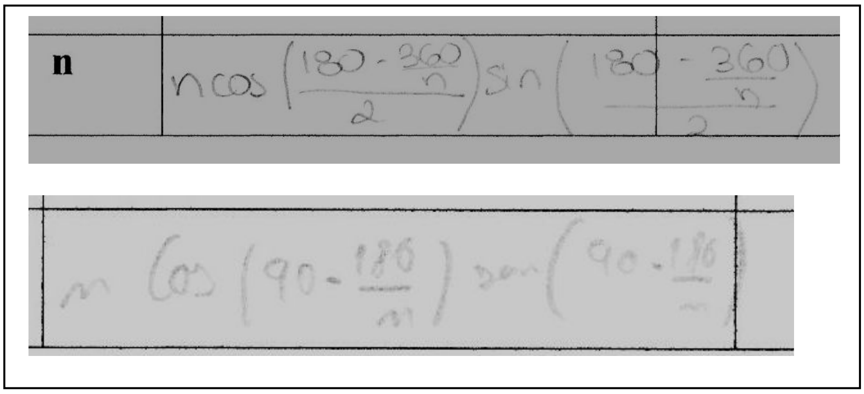
n	Valor exacto da área	Valor aproximado da área
3	$3\cos 30^0 \sin 30^0$	1.2990
4	$\frac{2\cos 45° \times 2\text{sen}\,45°}{(2\cos 45°)^2}$	2
5	$5\cos 54° \times \text{sen}\,54°$	2,3776
6	$6\cos 60° \times \text{sen}\,60°$	2,5981

$4\cos 45° \cdot \text{sen}\,45°$

$5 \times \frac{2\cos 54° \times \text{sen}\,54°}{2}$

$6 \times \frac{2\cos 60° \times \text{sen}\,60°}{2}$

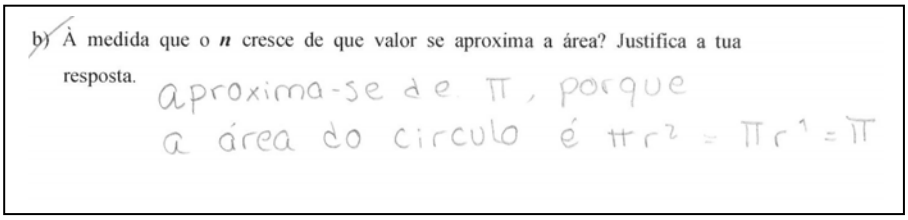
Estabelecendo relações entre conceitos estudados, todos os grupos chegaram à expressão geral. Ilustram-se na figura a seguir duas expressões equivalentes elaboradas por grupos diferentes.



n	$n\cos\left(\frac{180-\frac{360}{n}}{2}\right)\sin\left(\frac{180-\frac{360}{n}}{2}\right)$

$n\cos\left(90-\frac{180}{n}\right)\operatorname{sen}\left(90-\frac{180}{n}\right)$

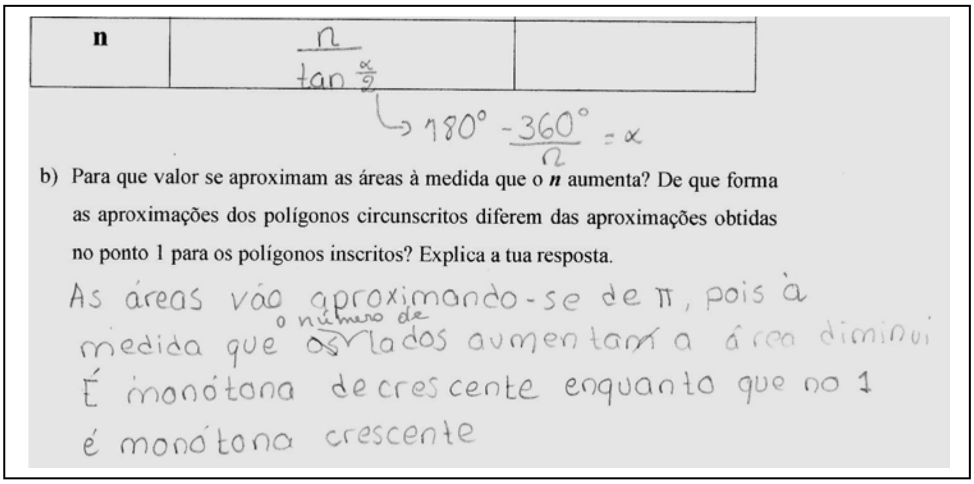
Analisando o comportamento da sucessão das áreas, os alunos, concluíram que a área se aproxima de π , e apresentaram as suas justificações que são semelhantes a esta que foi apresentada por um grupo.



b) À medida que o *n* cresce de que valor se aproxima a área? Justifica a tua resposta.

aproxima-se de π, porque a área do circulo é $\pi r^2 = \pi r^1 = \pi$

Para a segunda questão, onde era pedida a área dos polígonos circunscritos a mesma circunferência, os alunos não encontraram dificuldades. Conjecturando e testando as conjecturas, conseguiram completar rapidamente a tabela, generalizando o valor exacto da área para ***n*** lados, e chegar ao termo geral. Circulando pelos grupos ouvi uma frase dita por uma aluna: "Acho que isso vai se aproximar outra vez de π". Ilustra-se uma das resoluções.



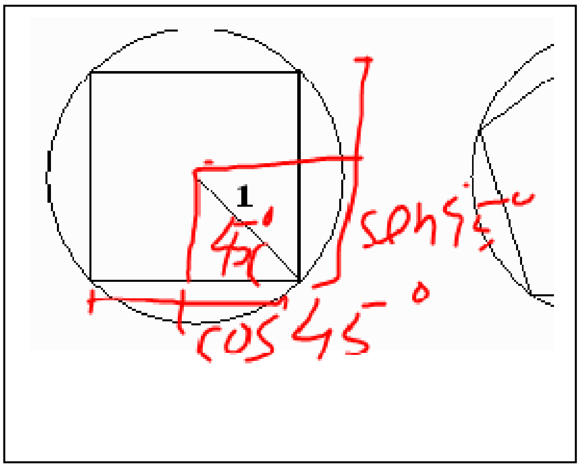
n	$\frac{n}{\tan\frac{\alpha}{2}}$	

$\hookrightarrow 180° - \frac{360°}{n} = \alpha$

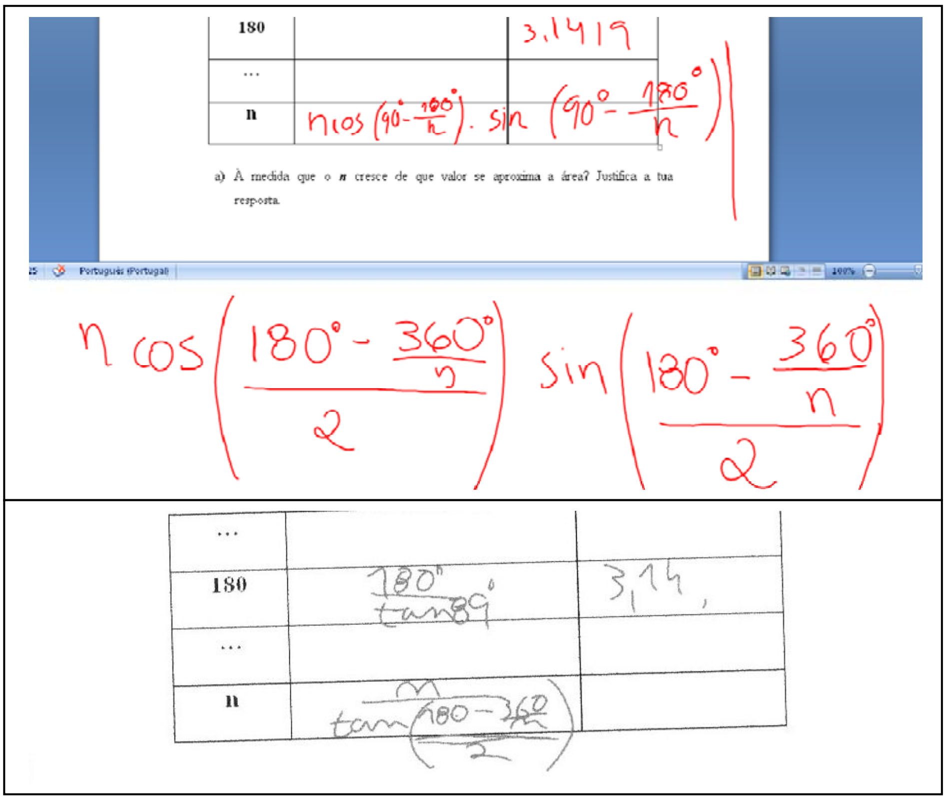
b) Para que valor se aproximam as áreas à medida que o *n* aumenta? De que forma as aproximações dos polígonos circunscritos diferem das aproximações obtidas no ponto 1 para os polígonos inscritos? Explica a tua resposta.

As áreas vão aproximando-se de π, pois à medida que o número de ~~os~~ lados aumentam a área diminui É monótona decrescente enquanto que no 1 é monótona crescente

Passando para a fase de discussão, pedi a alguns alunos para mostrarem as estratégias elaboradas para chegar à generalização. Um dos grupos explicou a estratégia elaborada para calcular a área do quadrado ilustrada a seguir.

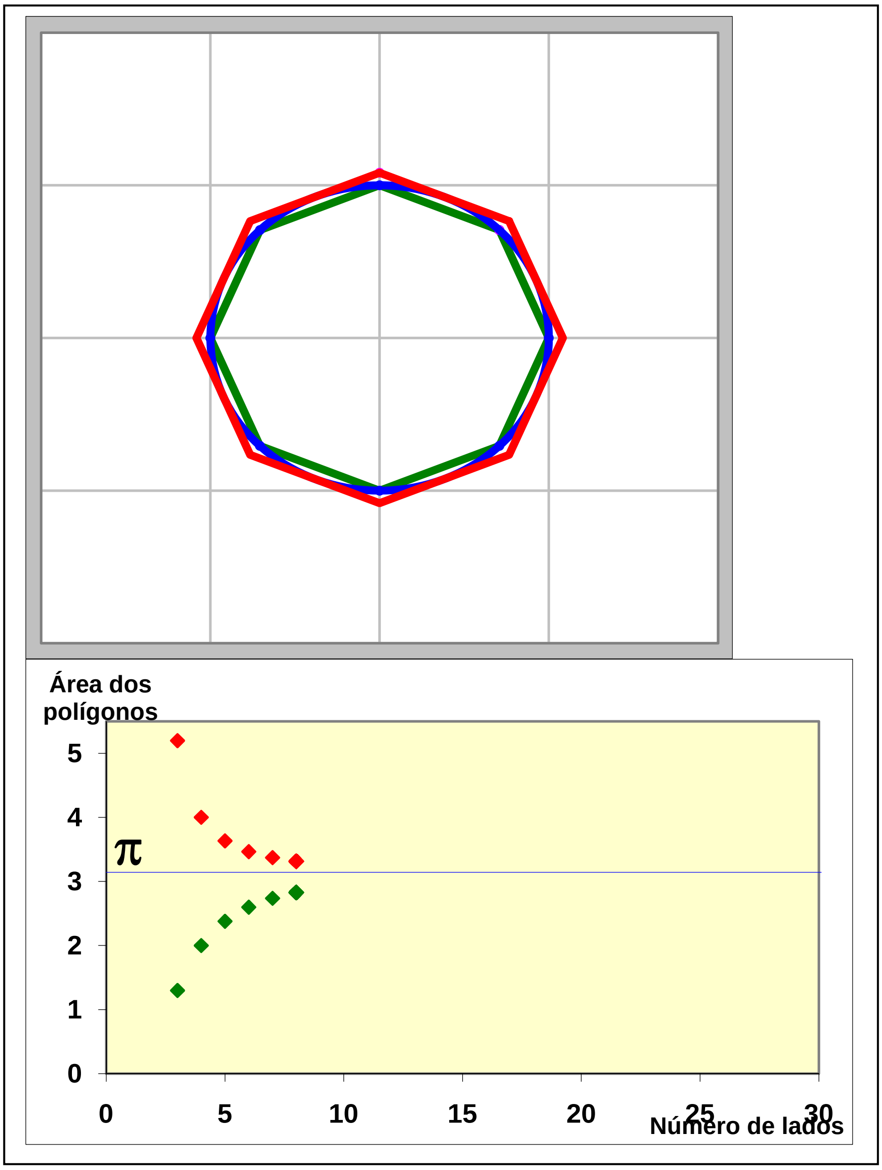


No entanto, inicialmente com passo prévio, nem todos os grupos escolheram esta estratégia. Outros grupos utilizaram o teorema de Pitágoras para calcular a respectiva área. Os alunos tentaram relacionar os resultados obtidos com a expressão indicada para a área do triângulo, construindo outras expressões e generalizando para o caso do polígono de ***n*** lados. No quadro foram registadas as seguintes expressões.



Em continuação foram discutidas as expressões gerais elaboradas. Na discussão questionou-se, se a expressão obtida corresponde ao termo geral da sucessão para as áreas dos polígonos inscritos, como para a área dos polígonos circunscritos. Depois de algumas tentativas erradas que não foram analisadas devido ao tempo, uns alunos da turma sugeriram que o ***n*** nas expressões obtidas se deveria alterar para ***n+2***. Fazendo estas alterações nas expressões escritas no quadro, os alunos passaram a corrigi-las nos seus registos.

Depois de analisada a monotonia de cada uma das sucessões, foram introduzidos os conceitos de majorantes e minorantes duma sucessão, com base nesta tarefa. Uma ilustração mais clara destas aproximações foi projectada no quadro com o apoio do software (Oliveira, 2009), previsto na planificação.



A representação gráfica incluída neste programa foi outro benefício na compreensão por parte dos alunos, dos conceitos de majorantes e minorantes das sucessões. A introdução do conceito de sucessão limitada não foi conseguida nesta aula, devido ao pouco tempo que faltava até ao fim da aula e devido à uma má gestão da discussão.

Considero assim, que os objectivos da aula foram parcialmente alcançados. Na aula seguinte, que já não fazia parte do meu conjunto de aulas, tive necessidade de intervir, para conseguir introduzir o conceito de sucessão limitada. Na mesma aula, os alunos realizaram uma tarefa sobre sucessões limitadas em que mostraram um bom empenho. Deste modo, consegui alcançar os objectivos da aula precedente.

As devidas alterações que sugiro para esta aula recaem sobre a Tarefa 7 (Anexo 7). Antes da primeira questão deveria introduzir uma questão prévia, sobre a amplitude do ângulo interno dum polígono regular de $\boldsymbol{n}$ lados. Ou seja deveria pedir aos alunos que determinassem a expressão analítica para calcular a amplitude do ângulo interno dum polígono regular de $\boldsymbol{n}$ lados. Desta forma não ia perder tempo na discussão para explicação dos cálculos efectuados em cada um dos casos.

A última aula que leccionei, foi cheia de emoções, não só por causa de ser última, mas devido à tarefa que considerei difícil de ser realizada pelos alunos. Antes de começar a aula pensei que os alunos iriam demorar imenso tempo na construção da expressão geral. Começando a aula, fui surpreendida, quando observei que passado pouco tempo, alguns grupos conseguiram chegar à expressão geral. A turma trabalhou bem, sem acontecer nada daquilo que eu presumia. Assim, fiquei muito satisfeita com o trabalho realizado pelos grupos durante a aula.

4.6. Métodos e Procedimentos de recolha de dados

A seguir, descrevo os principais métodos e procedimentos delineados na recolha de dados, para desenvolver o presente estudo, cujo objectivo é identificar qual é a importância das conexões entre vários tópicos da Matemática no estudo das sucessões reais. Apresento ainda os instrumentos de recolha de dados e a caracterização dos participantes envolvidos neste estudo, justificando as escolhas realizadas.

De acordo com o objectivo e as questões do estudo, optei pelos seguintes métodos de recolha de dados: observação e recolha documental.

A observação recaiu sobre as aulas leccionadas e em particular sobre a realização por parte dos alunos das tarefas propostas. Elaborei um guião de observação que orientou a recolha de informação (Anexo 16). As observações foram registadas em áudio e em vídeo para perceber quais as representações que os alunos usam mais frequentemente, que conexões estabelecem, de que forma e as suas dificuldades. As gravações áudio realizadas no grupo, que foi alvo do meu estudo, forneceram uma informação muito detalhada sobre a interacção dos alunos dentro do grupo, sobre as estratégias elaboradas, sobre modo como estabelecem conexões, sobre as dificuldades que mostra cada um dos membros do grupo. Os diálogos dentro do grupo ajudaram a responder às questões da problemática em estudo. As gravações vídeo foram utilizadas, quando os alunos do grupo alvo iam ao quadro explicar alguma estratégia, e para me recordar os momentos da aula.

A recolha documental incluiu as produções dos alunos, os seus cadernos diários, os trabalhos de casa e os registos efectuados no quadro interactivo durante as aulas leccionadas. As tarefas construídas para desenvolver este estudo procuravam identificar as estratégias elaboradas pelos alunos e as dificuldades apresentadas. Além disso, procuravam verificar quais são as conexões que os alunos conseguem estabelecer entre vários tópicos da Matemática incluindo as conexões entre vários tipos de representações.

Os participantes deste estudo são os alunos da turma de 11.ºano do Curso Ciências e Tecnologias, cujo currículo engloba a disciplina de Matemática A. Para desenvolver o meu estudo foram escolhidos quatro alunos desta turma. Devido às observações das aulas realizadas e a leccionação dalgumas aulas durante o ano lectivo 2009/2010, incorporadas nas disciplinas de IPP III e IPP IV, tive oportunidade de conhecer bem os alunos da turma. No início do ano lectivo entrei em contacto com a directora da turma que me forneceu as fichas de identificação de cada aluno. A informação sobre a turma foi obtida também através da conversa com a professora de Matemática da turma. Durante o ano lectivo, estando presente em todas as aulas de Matemática da turma, consegui saber muito mais acerca de cada aluno. A recolha de informação sobre a turma e sobre cada aluno em particular, também me foi facilitada, devido à minha participação em todas as reuniões do conselho da turma, incluindo as reuniões de avaliação. Para ter presente o desempenho a Matemática e as dificuldades que apresenta cada aluno, realizei a observação dos cadernos diários dos alunos que foram recolhidos regularmente várias vezes durante o período lectivo. A observação dos cadernos recaiu sobre os registos dos alunos durante as aulas de Matemática e sobre as tarefas realizadas para trabalho de casa.

Como este estudo pretende descrever as estratégias e as dificuldades que apresentam os alunos centrando-se mais nos processos e menos nos resultados, pareceu-me conveniente o número de quatro alunos, adequado aos objectivos definidos e a metodologia escolhida. Esta escolha também foi coerente com o tempo disponível para realização do estudo.

Os alunos escolhidos como objecto de estudo foram seleccionados de acordo com os seguintes critérios. Desde já, todos os alunos apresentaram as autorizações dos seus encarregados de educação. Os respectivos alunos são participativos nas aulas, mostram interesse pela disciplina. Tive também em consideração o aproveitamento de cada aluno a Matemática. O aproveitamento dos alunos do grupo vária entre muito bom e bom. Nos trabalhos de casa e nos testes realizados durante o ano lectivo, verifiquei que os mesmos têm bons raciocínios e por vezes apresentam diferentes estratégias de resolução do mesmo problema. Nas aulas colocam perguntas e não hesitam em pedir esclarecimento sobre as suas dúvidas. Observando a interacção dos alunos nalguns trabalhos de grupo realizados nas aulas durante o ano lectivo, verifiquei que os respectivos alunos sabem trabalhar em grupo sendo um grupo pouco heterogéneo quanto ao aproveitamento na disciplina de Matemática.

Ana. A Ana tem 17 anos e é muito simpática, reservada e sempre disposta para ajudar. Teve sempre boas notas a Matemática e sempre gostou desta disciplina. A classificação final da Ana no 10.º ano foi de 16 valores. Considera-se uma aluna assídua e pontual. Diz que "sempre gostou da Matemática e teve boas notas". Tem uma boa participação nas aulas e é persistente na procura de soluções. Procura sempre que possível esclarecer as suas dúvidas e ter uma relação de cooperação com os colegas. O caderno diário da Ana apresenta uma boa organização e uma regularidade na realização dos trabalhos de casa. A classificação obtida no 2.º período deste ano lectivo foi de 16 valores.

João. O João tem 17 anos, é simpático, assíduo e pontual. Não gostou sempre de Matemática. Segundo o João, "comecei a gostar da Matemática desde o 8.º ano, quando comecei a perceber melhor a matéria". A classificação final do João no 10.º ano foi de 13 valores. Participa de um modo responsável no trabalho individual e do grupo, na sala de aula. É um aluno que lança muitas perguntas durante a aula, mostrando interesse em aprender. Tenta realizar as tarefas da aula com autonomia, pedindo as vezes ajuda aos colegas e à professora para esclarecer as dúvidas. É persistente na procura de soluções e mostra que quer melhorar o seu rendimento. O caderno diário do João tem uma organização moderada. Os trabalhos de casa são realizados com regularidade. A classificação obtida no 2.º período deste ano lectivo foi de 14 valores.

Carlos. O Carlos tem 17 anos, é simpático e por vezes distraído. Segundo o Carlos, "a minha disciplina preferida é a Matemática". A classificação final do Carlos no 10.º ano foi de 18 valores. Nas actividades das aulas apresenta interesse, revelando bons raciocínios e boas estratégias de resolução de problemas. Afirma que "aprendo em todas as tarefas e empenho-me em todas de mesma forma". Falando nas suas condutas durante as aulas, o Carlos afirma que "devo melhorar em relação à minha conduta durante as aulas". O caderno do Carlos é bem organizado. Muitas vezes realiza os trabalhos de casa mas não sempre. A classificação obtida para o 2.º período deste ano lectivo foi de 17 valores.

Filipe. O Filipe tem 17 anos, é simpático assíduo e por vezes inseguro. Considera a escola necessária para o seu futuro. Começou a gostar da matemática a partir do 9.º ano quando começou a ter, segundo o Filipe, " um bom professor de Matemática". Até ao 9.º ano, a Matemática, segundo o Filipe "não lhe dizia nada". A classificação final do Carlos no 10.º ano foi de 17 valores. Nas aulas é muito participativo, pede muitas vezes para ir ao quadro, coloca perguntas quando tem dúvidas. Empenha-se em melhorar o seu ritmo de trabalho na aula e a gerir melhor o tempo na realização das tarefas. Procura cooperar para um bom ambiente de trabalho na sala de aula. O caderno do Filipe tem uma organização moderada. Realiza os trabalhos de casa muitas vezes, mas nem sempre. Gosta de resolver individualmente problemas e exercícios dos outros livros de Matemática do mesmo ano. A classificação obtida no 2.º período deste ano lectivo foi de 17 valores.

Capítulo 5

Análise de dados

Neste capítulo apresento a análise dos dados recolhidos, de forma a responder às questões do estudo. Para dar resposta às questões do estudo, baseei-me na análise dos trabalhos realizados pelos alunos do 11.º ano, da escola Vergílio Ferreira nos seis blocos de 90 minutos que leccionei. Todos os trabalhos de grupo foram gravados, o que auxiliou esta análise de dados. As sete tarefas propostas aos alunos foram na maioria de cunho exploratório, englobando problemas e exercícios. Entre as tarefas propostas, quatro foram trabalhadas em grupos de 3 ou 4 alunos, uma a pares e outras duas individualmente, sendo uma delas realizadas na aula e outra como trabalho de casa. O meu foco para desenvolver o estudo foi o grupo de quatro alunos, cuja caracterização foi descrita no capítulo anterior.

A seguir serão analisadas as resoluções dos alunos para cada uma das tarefas, com dados ilustrados, procurando sempre ir ao encontro das questões do estudo.

5.1. Análise da Tarefa1

O objectivo desta tarefa é, como já foi referido, a introdução do conceito de sucessão de números reais, termo geral e representação gráfica.

Em relação à primeira questão, o grupo que foi objecto do meu estudo, elaborou uma estratégia diferente, em relação aos colegas da turma. Para contar o número de bolas da sexta e da sétima figura utilizaram um raciocínio por recorrência ilustrado a seguir (Figura 1).

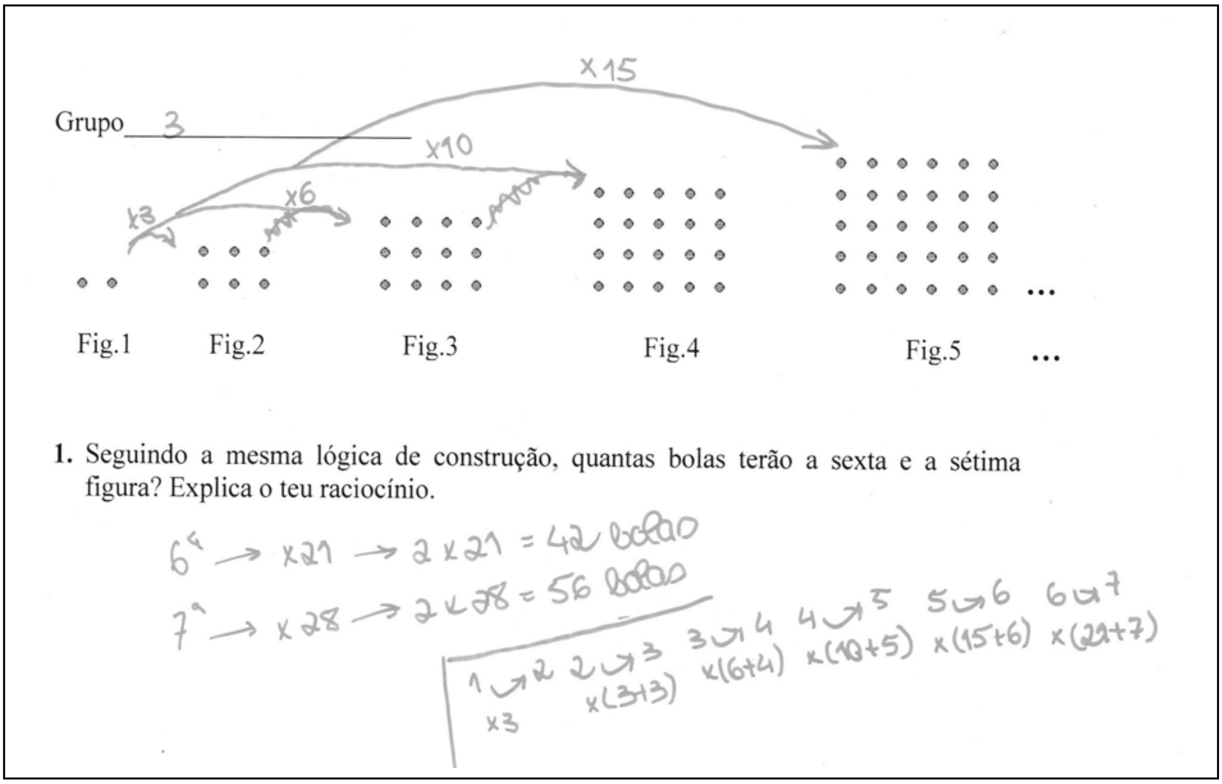


Figura 1 – Resolução da primeira questão da Tarefa 1

Os passos de resolução foram os seguintes. Primeiro, o grupo passa da representação geométrica para a numérica contando o número de bolas de cada número rectangular apresentado e procurando relacionar cada um dos números rectangulares com o primeiro. Na procura desta relação encontram uma sucessão de factores 3, 6, 10, 15,… como se verifica pelo diálogo:

1. **Filipe:** Daqui para aqui, é vezes três. Daqui para aqui, é vezes seis. Daqui para aqui, é vezes dez.
2. **Ana:** Exacto.
3. **Filipe:** E por último, daqui para aqui, é vezes quinze.

Os alunos percebem que é esta sucessão que os vai ajudar a descobrir os outros números rectangulares. Começam então a procurar relações entre os termos da nova sucessão acima referida:

4. **Ana:** Então, agora qual é a relação entre isso tudo?
5. **João:** Então, olhem fazemos assim. A partir desta, multiplicamos por três e seguidamente por seis. E depois…
6. **Carlos:** Não, assim não dá.

7. **Ana:** Como é que fazemos isso…? Ah, já sei como isso é! Aqui é vezes três e depois somas mais três. Aqui, vezes seis, mais quatro, a seguir vezes dez, mais cinco…
8. **Filipe:** Ah, e depois mais seis.
9. **Carlos:** Como é que é?
10. **João:** Ah, mas tudo do primeiro.
11. **Ana:** Sim, claro. Fica assim, aqui somas mais três, aqui mais quatro, a seguir mais cinco. No próximo, mais seis e no próximo mais sete.
12. **Carlos:** Sim, mas agora temos que fazer isso por meio duma expressão.
13. **Ana:** Pois, exacto. Então fica o anterior…
14. **Carlos:** A sexta é vezes 21. O 3, 4, 5, 6, … é o número da figura.
15. **Filipe:** E a outra é vezes 28.
16. **João:** Então a sexta tem dois vezes 21, que dá 42 bolas
17. **Carlos:** E a sétima, dois vezes 28. Então a sétima tem 56 bolas.

Conforme as falas 7, 8, 11 do diálogo anterior, a relação que o grupo encontra é apresentada pela seguinte sucessão: 3, (3+3), (6+4), (10+5), (15+6), (21+7), … A Figura 1 também ilustra esta estratégia. Observa-se que a estratégia elaborada pelo grupo baseia-se num raciocínio por recorrência, assim como se verifica também pelas falas 12 e 13. Relacionando o termo com a ordem, e estabelecendo conexões entre a representação verbal e numérica conseguem calcular os números rectangulares pedidos.

Analisando esta resolução, observa-se que o grupo contou o número de bolas correspondente a cada número rectangular, para estabelecer uma relação entre o primeiro e os outros números rectangulares. O grupo utilizou a representação numérica da sequência dos números rectangulares. Observando como se obtém a segunda figura a partir da primeira, seguiram o mesmo raciocínio, relacionando cada número rectangular obtido, com o primeiro. O grupo conseguiu estabelecer a relação entre o número anterior e a respectiva ordem e concluíram correctamente qual é o número de bolas da 6.ª e 7.ª figura. Este raciocínio é válido só para determinar um termo a partir do anterior ou seja é um raciocínio por recorrência.

Relativamente à primeira parte da segunda questão, o grupo não se deparou com dificuldades e conseguiu escrever a expressão geral, seguindo a lei de formação apresentada na tabela (Figura 2).

Ordem da Figura	Número de bolas
1	$1 \times 2 = 2$
2	$2 \times 3 = 6$
3	$3 \times 4 = 12$
4	$4 \times 5 = 20$
5	$5 \times 6 = 30$
6	$6 \times 7 = 42$
7	$7 \times 8 = 56$
8	$8 \times 9 = 72$
…	…
n	$n \times (n+1)$
…	…

Figura 2 – Resolução da primeira parte da segunda questão da Tarefa 1

Relativamente à segunda parte da mesma questão, verificou-se nos diálogos existentes no grupo, que os alunos testaram a hipótese de descobrir se 182 é número rectangular, por tentativas, mas abandonaram esta ideia e apresentaram a seguinte resolução, recorrendo a uma equação de segundo grau (Figura 3).

$n(n+1) = 182 \Leftrightarrow n^2 + n = 182 \Leftrightarrow n^2 + n - 182 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n = 13 \vee n = -14$

R: Sim, a ordem é $n = 13$

Figura 3 – Resolução da segunda parte da segunda questão da Tarefa 1

Um excerto da discussão em grupo revela a conexão construída com as funções para determinar se o 182 é um número rectangular, envolvendo também a fórmula resolvente:

> **Filipe:** Se 182 é número rectangular...? Podemos fazer por tentativas.
> **João:** Como é que vocês estão a fazer isso?

Ana: Então é para ver se 182 é número rectangular. Igualamos esta expressão com 182.
João: Ah,…
Ana: Depois aplicas a fórmula resolvente.
Carlos: Dá, 13 ou -14.
Ana: Sim.
Filipe: A resposta é sim, a ordem é 13.

O grupo não questionou nem justificou o facto do valor $n = -14$ não ser solução do problema.

A terceira questão foi resolvida pelo grupo desta forma (Figura 4).

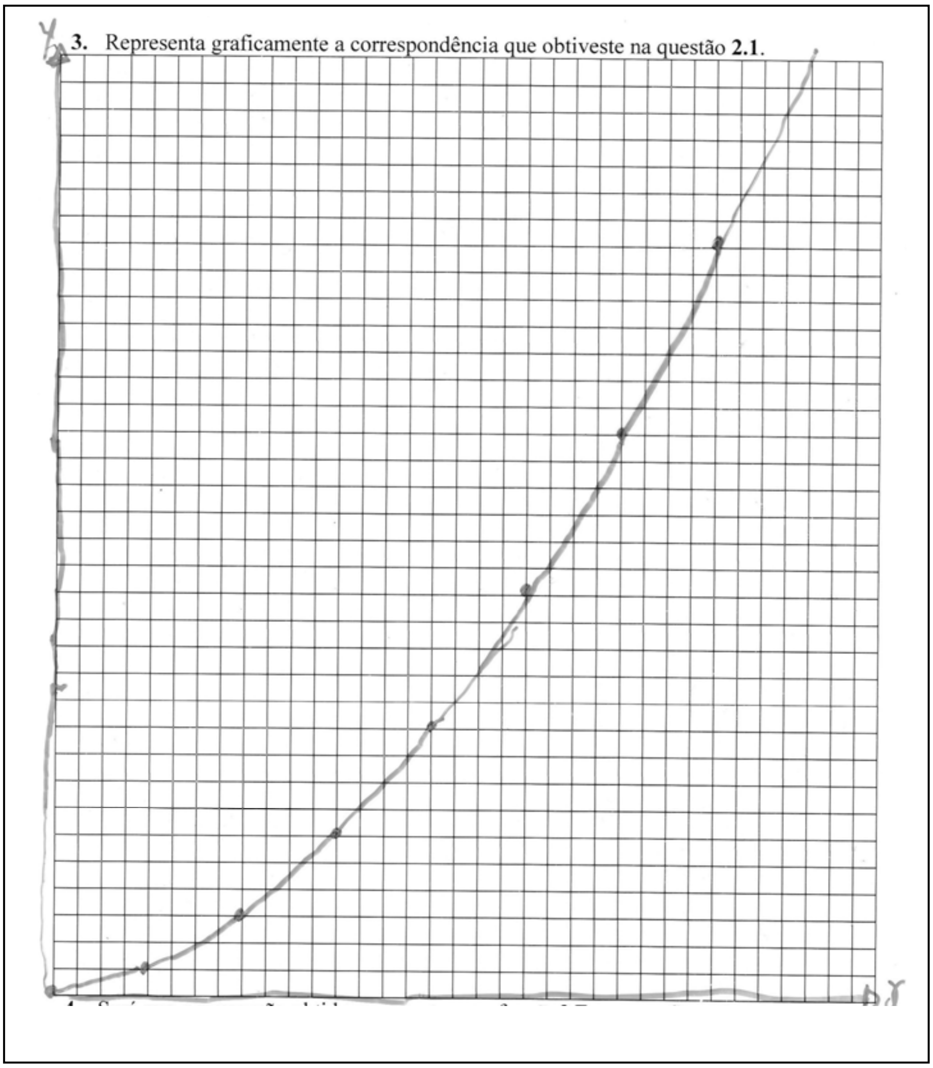


Figura 4 – Resolução da terceira questão da Tarefa 1

Os alunos construíram o gráfico estabelecendo conexão com a representação gráfica duma função de domínio real. Esta representação da sequência dos termos da sucessão, baseia-se na representação que os alunos estão habituados a construir, no caso das funções. O grupo concluiu que a parte correspondente às abcissas negativas não estava na representação gráfica, mas não conseguiu relacionar a representação gráfica com o domínio:

> **Filipe:** Isto é uma parábola.
> **Carlos:** Sim, eu já fiz.
> **Filipe:** Ah, mas a parte negativa não entra.
> **João:** Mas, os números rectangulares são no *x* ou no *y*?
> **Filipe:** No *y*.
> **João:** O que estás a fazer?

Assim, os alunos concluíram na questão quatro o seguinte (Figura5).

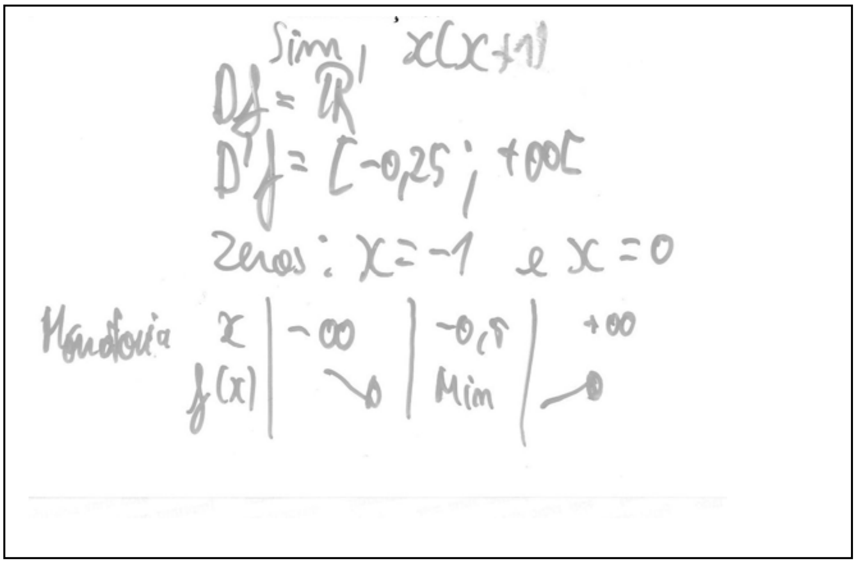


Figura 5 – Resolução da quarta questão da Tarefa 1

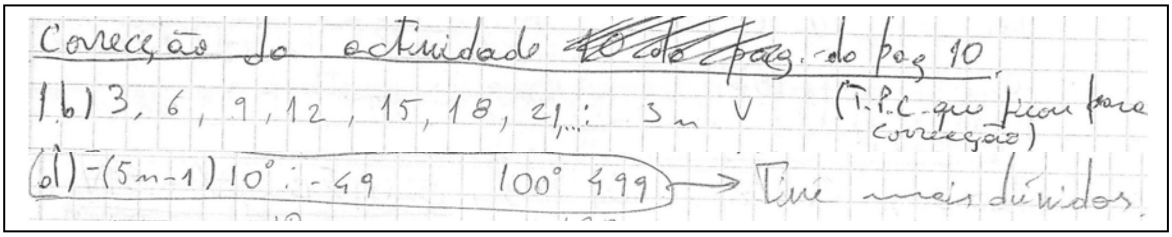
Caracterizando a correspondência do mesmo modo como caracterizavam uma função, os alunos não revelaram compreender que esta representação é uma restrição da função ao conjunto IN.

Analisando a primeira tarefa, pode-se concluir que os alunos interiorizaram os conceitos de ordem, termo e termo geral. Seguindo raciocínios próprios e cometendo alguns erros, os alunos aprenderam através desta exploração o que é uma sucessão e como se representa graficamente.

Conclui-se que, nesta primeira etapa do estudo das sucessões, os alunos do grupo analisado, recorrem à representação numérica da sucessão e não utilizam a representação geométrica proposta. Os alunos conseguem encontrar um termo de determinada ordem, recorrendo aos termos anteriores. Revelam ainda algumas dificuldades na conexão entre a representação numérica e analítica. A passagem da representação verbal, elaborada pelo grupo na questão um, para uma generalização simbólica também apresentou algumas dificuldades. A representação analítica descoberta pelos alunos na questão dois, facilitou a construção gráfica dos termos da sucessão. Sintetizando, na primeira tarefa os alunos utilizaram a representação numérica como passo intermédio de passagem da representação verbal para uma generalização. Para estudar o comportamento dos termos da sucessão dos números rectangulares, os alunos recorreram à representação gráfica, sendo a representação analítica um apoio à representação gráfica.

As principais dificuldades durante a realização desta tarefa recaíram na generalização dos raciocínios, na representação gráfica da sucessão e na caracterização da sucessão como uma função real de variável natural. A lei de formação dos números rectangulares foi muito direccionada, pelo que os alunos sem dificuldades passaram para a representação analítica. No caso da estratégia elaborada pelo grupo na primeira questão, para calcular todos os números rectangulares, manifestaram-se algumas dificuldades, dado o raciocínio elaborado ter sido por recorrência. Os alunos nesta fase de início do estudo das sucessões, ainda não sabem definir uma sucessão por recorrência, no entanto, de uma forma natural, os alunos utilizaram o raciocínio por recorrência para obter o número de bolas das figuras. A conexão entre a representação gráfica e a caracterização da sucessão como função foi outra dificuldade encontrada. Para ultrapassarem estas dificuldades, os alunos lançaram questões em grupo, tentaram compreender os raciocínios dos colegas e estabeleceram conexões com os conceitos já estudados.

Entre todos alunos do grupo, o João revela maiores dificuldades. O trabalho de casa que foi dado para esta aula, não foi realizado pelo João. No caderno diário, ele apresentou algumas tentativas de resolução, mas não concluiu. Eu dei-lhe algumas indicações para o ajudar. Na aula seguinte aproximei-me dele e perguntei se já tinha conseguido a resolução do trabalho de casa. Ele respondeu-me: “Sim, já sei fazer”. Verifica-se pelo caderno diário do João que para determinar o termo geral, o 10.º mais o 100.º termos da sucessão $(d_n): -4, -9, -14, -19, -24, \ldots$, o João revela dificuldades.


Correcção da actividade ~~10 da pag.~~ do pag 10

1.b) 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21,...: 3n V (T.P.C que ficou para correcção)

d) -(5n-1) 10°: -49 100° 499 → Tive mais dúvidas.

Figura 6 – Excerto do caderno diário do João

5.2. Análise da Tarefa 2

O objectivo principal desta tarefa foi a resolução de problemas e o estudo do termo geral duma sucessão.

Nas primeiras duas questões desta tarefa, os alunos deveriam resolver problemas de vários contextos e desenvolver a capacidade de passar duma dada representação para a analítica, ou seja determinar o termo geral duma dada sucessão.

Para a primeira questão, em que os alunos deveriam encontrar o termo geral dos números quadrados, os alunos apresentaram a seguinte resolução (Figura 7).

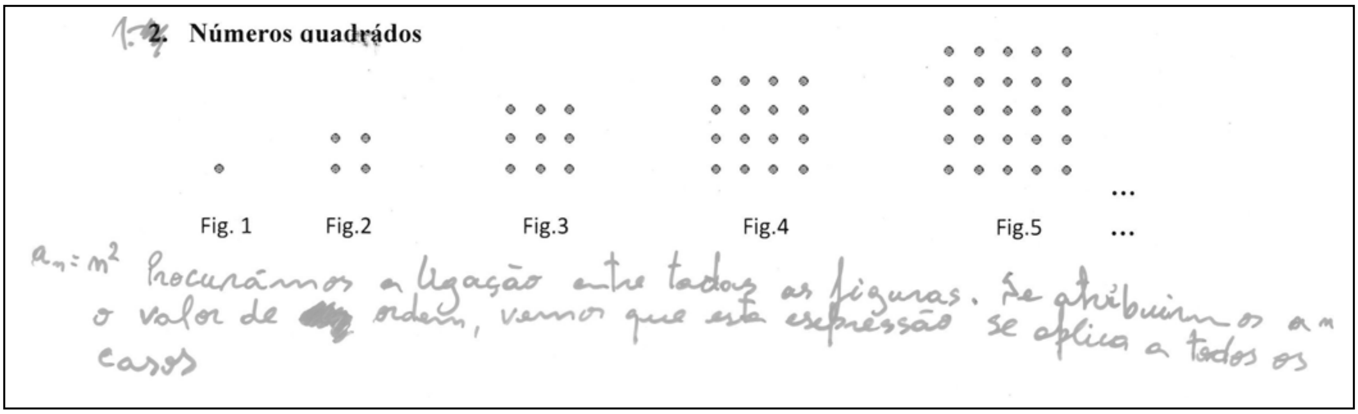


Figura 7 – Resolução da primeira questão da Tarefa 2

Observa-se pela resolução, que os alunos com apoio na representação geométrica, procuraram a relação entre as figuras e sem utilizar a representação numérica, passaram à representação analítica (fala um). Validando a conjectura estabelecida, concluíram que a expressão $\boldsymbol{n^2}$ se aplica a todos os números quadrados. Nesta questão os alunos não apresentaram dificuldades. No entanto, verifica-se nas falas 2, 4 e 6 que o João ainda estava com algumas dificuldades em perceber qual é a ordem e qual é o termo. Nas falas 5 e 7 verifica-se uma intervenção dos colegas para esclarecer as dúvidas do João, desta vez utilizando a representação numérica como passo intermédio entre a representação geométrica e a analítica, assim como se verifica na fala 7:

1. **Carlos:** É $\boldsymbol{n^2}$.
2. **João:** Não, não. Como é? Nunca percebi esta coisa das sequências.
3. **Carlos:** Ele não percebe.
4. **João:** Mas qual é que é o ***n***?
5. **Carlos:** É um número qualquer.
6. **João:** E o $\boldsymbol{n^2}$**?**
7. **Ana:** Se n=1, temos um ao quadrado que dá um, se for 2, temos dois ao quadrado. É como se tivesses 1^2, 2^2, 3^2, …

8. **João:** Ah…
9. **Filipe:** E agora como justificamos?
10. **Carlos:** Então $a_n = n^2$ porque…
11. **Filipe:** Porquê, então?
12. **João:** A Ana já diz, porque eu então estou a moer aqui.
13. **Ana:** Procuramos a ligação entre todas as figuras e atribuindo à ***n*** o valor da ordem vemos que a expressão se aplica a todos os casos.

Como se pode observar nas falas 9-12, o grupo encontra alguma dificuldade em justificar a estratégia elaborada. Na fala 13, pode observar-se que um dos elementos do grupo consegue elaborar uma justificação para esta estratégia.

Os alunos apresentaram mais dificuldades na resolução da segunda questão, em que o contexto originava uma sucessão cuja expressão analítica era uma potência de dois. Eis a resolução do grupo relativamente à esta questão (Figura 8).

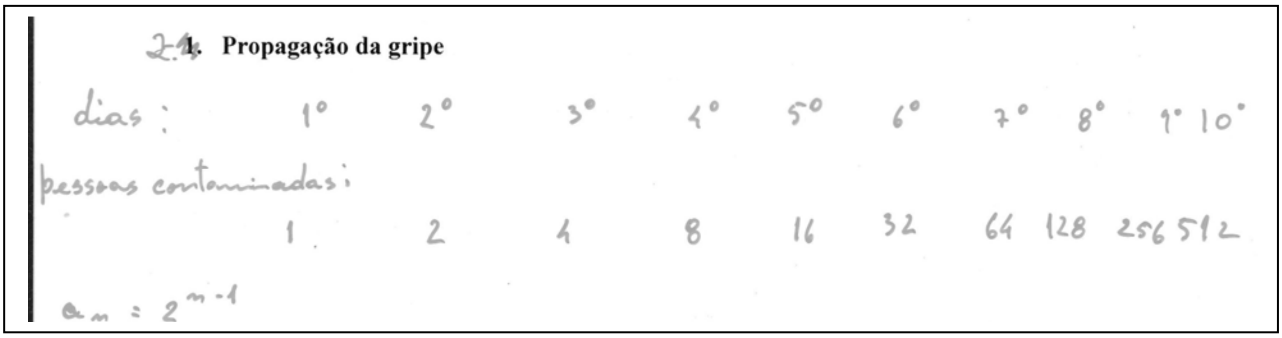


Figura 8 - Resolução da segunda questão da Tarefa 2

O seguinte diálogo revela os passos e as dificuldades encontradas pelo grupo, no estabelecimento de conexões entre várias representações para chegar à representação analítica:

14. **Filipe:** Imaginas que eu estava engripado e contaminei-te a ti. No segundo dia já somos duas pessoas contaminadas.
15. **Carlos:** A expressão é $\boldsymbol{n^2}$. Não, então olhem. No primeiro dia temos uma pessoa contaminada e depois 2, 4, 8, …É **2*n***.
16. **Filipe:** Não, é $\boldsymbol{n^2}$.
17. **Carlos:** Não, já sei. É 2, não, é $\boldsymbol{n^n}$**,** acho eu.
18. **Filipe:** Então espera, um mais um é dois, dois mais dois é quatro, quatro mais quatro é oito,…, 256 vezes 2 é …
19. **João:** É 512 no 10.º dia.
20. **Ana:** O número de infectados é igual ao número de dias?
21. **Carlos:** Pois, aposto que é $\boldsymbol{n^n}$.
22. **João:** Mas quais são os infectados?

23. **Ana:** Olha, é assim no primeiro dia há um contaminado, no segundo são dois, no terceiro estes dois contaminam outros dois e ficam quatro contaminados.
24. **Filipe:** Aqui vamos ter quatro, depois quatro mais quatro é oito.

O grupo começa a raciocinar utilizando uma representação verbal como se verifica na fala 14, tentando passar logo para a representação analítica (fala 15). A seguir, verificam que a expressão encontrada $\boldsymbol{n^2}$ não se verifica. Assim, os alunos passam da representação verbal para a numérica (fala 15), mas nem assim conseguem encontrar o termo geral. Na interacção entre os alunos do grupo, observam-se várias tentativas para descobrir o termo geral da sucessão, utilizando representação verbal (falas 20, 22, 23), analítica (falas 16, 17, 21) e a representação numérica (falas 18, 19, 24).

Num dado momento, os alunos estabelecem conexões com conceitos estudados, recorrendo aos múltiplos (falas 26, 28) e às propriedades das potências (falas 30,31):

25. **Carlos:** Então e agora?
26. **Filipe:** Não sei como isto se faz? Ah já sei, isto aqui são múltiplos de 8.
27. **Ana:** Ah, pois é.
28. **Carlos:** Então é $\boldsymbol{8n}$ menos, … não sei. Isso é tudo vezes dois.
29. **Filipe:** É $\boldsymbol{2^n}$.
30. **Carlos:** Não, porque $2^1 = 2$, no primeiro dia.
31. **Filipe:** $2^3 = 8$, mas o 3 = 4-1. Então se fosse$\boldsymbol{2^{n-1}}$? Dois elevado a um menos um é zero, dois elevado a zero dá um.
32. **Carlos:** Então agora verifica para 5.º.
33. **Filipe:** Dá 16. Então já sei é $\boldsymbol{2^{n-1}}$**.**

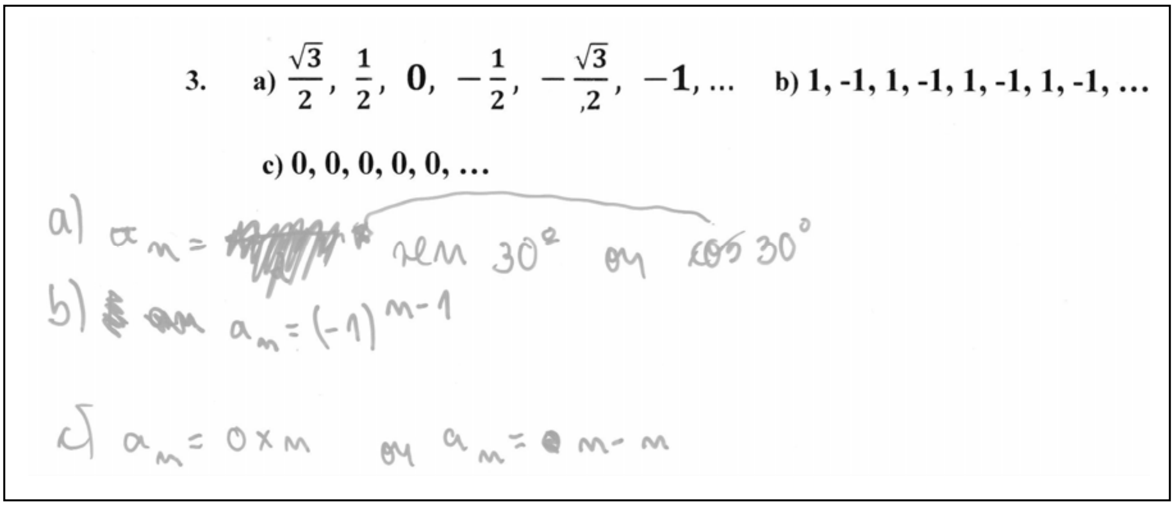
O João não conseguiu seguir os raciocínios do grupo, assim não percebeu porque é que a expressão encontrada é aquela e não é outra (fala 36). Ele ainda mostra dificuldades em relacionar o termo com a ordem (falas 40, 42) impedindo-lhe assim a passagem da representação numérica à analítica. O grupo tentou ajudar o João em perceber o que o $\boldsymbol{n}$ (fala 41) e porquê a expressão elaborada é o termo geral da sucessão (falas 36, 38, 39, 41):

34. **Ana:** Percebes João?
35. **João:** Mais ou menos. Olha lá, porquê que não pomos só **2n**?
36. **Ana:** Porque não pode ser. Se fosse **2n**,…
37. **João:** Seria 2, 4, 6, não dá…
38. **Carlos:** Temos que ter em atenção a ordem.

39. **Filipe:** Se fosse $\mathbf{2^n}$…
40. **João:** Mas o que é $\boldsymbol{n}$?
41. **Carlos:** É a ordem do primeiro termo, do segundo, do terceiro. Se fosse $\mathbf{2^n}$, temos dois elevado a um que é dois, portanto não dá. Agora se fizemos $\mathbf{2^{n-1}}$, temos dois elevado à um menos um, que é dois elevado a zero e que dá um.
42. **João:** Ah**,** mas este aqui é que é o $\boldsymbol{n}$? Está bem.
43. **Ana:** Passamos à frente?
44. **João:** Sim.

O grupo passou por várias etapas. Primeiro tentaram perceber o problema, a seguir passaram do contexto do problema para uma representação verbal. Da representação verbal, tentaram passar imediatamente para a representação analítica, não conseguindo, recorreram à representação numérica como passo intermédio para a representação analítica. Estabelecendo conexões com conceitos estudados, e utilizando a representação verbal, numérica e analítica, chegaram à expressão para o termo geral. Entre todos os membros do grupo, só o João apresentou algumas dificuldades no estabelecimento de conexões entre o contexto do problema e a representação numérica. Com algumas dificuldades em relacionar a ordem com o termo da sucessão do número de pessoas contagiadas pelo vírus da gripe, o grupo conseguiu estabelecer conexão entre a representação numérica e analítica, onde o João apresentou ainda dificuldades.

A questão três desta tarefa tinha como objectivo a construção duma ou de mais expressões analíticas para as sucessões representadas por números. O grupo apresentou o seguinte (Figura 9).


3. **a)** $\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{,2}, -1, \ldots$ **b)** 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, …

c) 0, 0, 0, 0, 0, …

a) $a_n =$ sen 30° ou cos 30°

b) $a_n = (-1)^{n-1}$

c) $a_n = 0 \times n$ ou $a_n = n - n$

Figura 9 - Resolução da terceira questão da Tarefa 2

Na resolução desta questão, os alunos do grupo, começaram pelas últimas duas sucessões.

45. **Filipe:** O b) já sei como é que é.
46. **Carlos:** O último também.

Na passagem da representação numérica da sucessão para a analítica, os alunos relacionaram a ordem com o termo e introduziram no termo geral da última sucessão a variável natural, como faziam no caso das funções. Evidencia-se neste discurso, o estabelecimento de conexões entre as funções e a elaboração de algumas expressões equivalentes:

47. **Ana:** O último pode ser $0 \times n$ ou não é?
48. **Carlos:** Também pode ser $n - n$?
49. **Ana:** Ah ou isso.
50. **João:** Então isso é o c)? É o $0 \times n$.
51. **Carlos:** Sim, mas não temos que fazer a_n igual a…?
52. **João:** Sim, $a_n = 0 \times n$.

Relativamente à penúltima questão, os alunos depararam-se com alguma dificuldade na transição da representação numérica para a analítica. A Ana tentou acompanhar o João, esclarecendo as dúvidas dele (falas 60-65), enquanto o Carlos e o Filipe (falas 53-59) tentaram elaborar a expressão analítica para o termo geral. Observa-se pelos diálogos, uma variedade de expressões analíticas (falas 53, 55, 60, 64) que foram testadas para determinar o termo geral da sucessão: $1, -1, 1, -1, 1, -1, ...$

53. **Carlos:** É $(n-1)^n$.
54. **Filipe:** Talvez…
55. **Carlos:** Não, não, …é… $(-1)^{n-1}$.
56. **Carlos:** É isso, é isso.
57. **Filipe:** Pois, mas assim vai dar mal.
58. **Carlos:** Porquê?
59. **Filipe:** Vai ter que ser…

60. **João:** A b) é $-n$.
61. **Ana:** Não, porque se for assim o segundo dava -2. Percebes?
62. **João:** Ai, ai, não estou a perceber qual é o n.
63. **Ana:** O n é um número qualquer. O n são estes valores.
64. **João:** Então é $\frac{n}{n}$. Não, em vez de 1 e -1 podia-se por $\frac{n}{n}$ e $-\frac{n}{n}$.
65. **Ana:** Olha, que o João tem razão.

A Ana e o João, não conseguindo determinar o termo geral, mas encontrando uma hipótese, juntaram-se aos raciocínios dos colegas. Pelo diálogo pode perceber-se que a Ana e o João, como não acompanharam o Carlos e o Filipe, não perceberam como foi elaborada a expressão para o termo geral (falas 67, 68, 76). Os colegas, Filipe e o Carlos, antes de começarem a explicar a expressão elaborada por eles, testam a hipótese descoberta pela Ana e o João (fala 69), mas abandonam porque a mesma não se verifica para todos os termos da sucessão (fala 70). Assim, fixam-se na expressão descoberta e tentam mostrar que se verifica para todos os termos (falas 70-75) e chegam à conclusão (fala 79) estabelecendo conexões com as propriedades das potências com base negativa:

66. **Carlos:** Não, é $(-1)^{n-1}$.
67. **João:** O que?
68. **Ana:** Mas como é que vocês chegaram a isso?
69. **Filipe:** Olhem, mas n a dividir por n dá um. Portanto 1/1 é um 2/2 é um, 3/3 é um. Aqui dá mesmo um.
70. **Carlos:** Olha temos que ter um, menos um; um, menos um, por isso é $(-1)^{n-1}$, vê lá se não dá? Menos um elevado a zero quanto é que dá?
71. **João:** Um.
72. **Carlos:** Agora faz: menos um elevado à um?
73. **João:** Dá um.
74. **Carlos:** Menos um elevado à dois?
75. **João:** Dá um. Então faz agora menos um elevado a três.
76. **Ana:** Como fizeram?
77. **Carlos:** Tem de ficar aí o um, menos um; um, menos um…
78. **Ana:** Sim.
79. **Carlos:** Quando é par é menos um, quando é impar é um.
80. **João:** Correcto, boa. Mas também dava da minha maneira.

O grupo volta depois à primeira sucessão que acharam desafiante. Tentando estabelecer relação entre a ordem e cada um dos termos, o diálogo foi o seguinte:

81. **João:** Olhem, esta é bem difícil.
82. **Filipe:** Tem qualquer coisa com raiz de três. Tem qualquer coisa a dividir por dois, não?
83. **Ana:** Não sei?
84. **Filipe:** Zero a dividir por dois, zero. Menos um a dividir por dois, menos um meio, menos dois a dividir por dois, menos um.
85. **Carlos:** Eu vou escrever qualquer coisa sobre dois.
86. **Filipe:** O que é aquela coisa não sei.

A conexão com as funções trigonométricas, apoiou o grupo na elaboração do raciocínio:

87. **Ana:** Olhem, pode ser co-seno ou seno. E tem de ser sempre de 30.
88. **Carlos:** Vou escrever: cós de trinta é igual à raiz de três sobre dois. E depois?

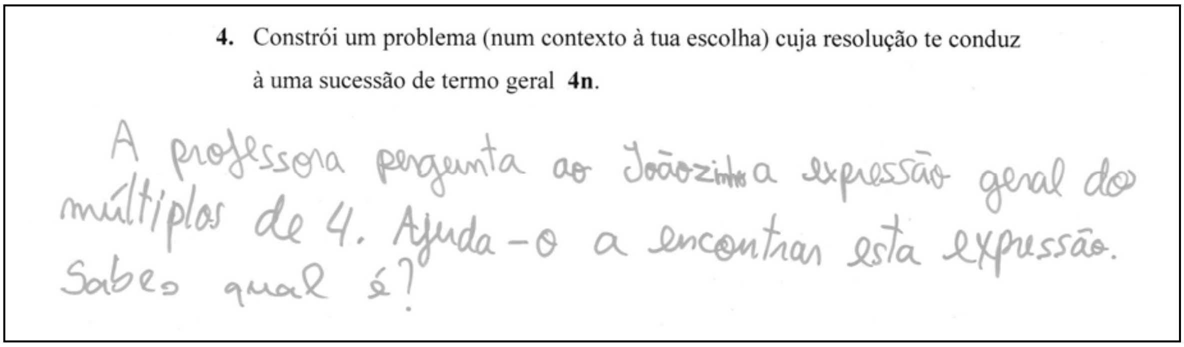
Como o tempo para a realização da tarefa já tinha acabado, o grupo não conseguiu desenvolver até ao fim a sua estratégia.

Na quarta questão desta tarefa pretendeu-se observar como os alunos estabelecem conexão entre a representação analítica e a verbal.

Nesta questão, o grupo passou a sucessão, da representação analítica para a representação numérica (fala 89) e depois para a representação verbal (fala 96). Estabelecendo conexões com os contextos dos problemas anteriores da mesma tarefa (fala 95), o grupo conseguiu formular um exercício com um contexto dado:

89. **Filipe:** Temos que construir uma sucessão. Então se é ***4n***, temos 4, 8, 12, 16, … É a tabuada do quatro.
90. **João:** Já construíste.
91. **Filipe:** Não, mas temos construir um problema.
92. **João:** Mas qualquer problema é uma sucessão?
93. **Ana:** Temos que inventar um contexto.
94. **João:** Como?
95. **Ana:** Então aí era a gripe, antes, os números quadrados.
96. **Filipe:** Ah já sei. É a tabuada de quatro. A professora pergunta ao Joãozinho… Não pode ser encontrar a expressão geral da tabuada de quatro?
97. **Carlos:** Sim mas precisamos de um contexto. Sobre múltiplos de quatro.
98. **Filipe:** Então fica: A professora pergunta ao Joãozinho a expressão geral dos múltiplos de quatro …

O grupo apresentou a seguinte representação verbal da sucessão com o termo geral ***4n*** (Figura 10).


4. Constrói um problema (num contexto à tua escolha) cuja resolução te conduz à uma sucessão de termo geral **4n**.

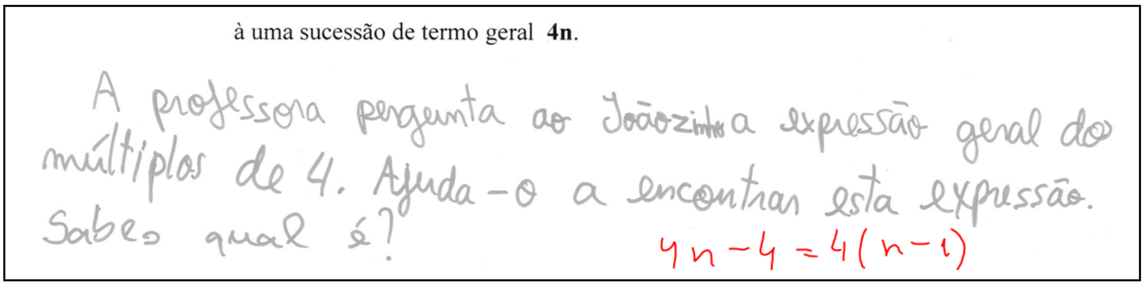
A professora pergunta ao Joãozinho a expressão geral dos múltiplos de 4. Ajuda-o a encontrar esta expressão. Sabes qual é?

Figura 10 - Resolução da quarta questão da Tarefa 2

Conforme o exercício elaborado pelo grupo, o número zero não fazia parte dos múltiplos, ou seja a expressão analítica ***4n*** dava todos os múltiplos sem ser o zero. Na aula a seguir confrontei os alunos com este pormenor. O grupo conseguiu rapidamente construir uma expressão analítica que dava para todos os múltiplos de quatro:

> **Professora:** Quais são os múltiplos de 4?
> **Alunos:** 4, 8, 12, …
> **Professora:** E o zero?
> **Alunos:** Também é.
> **Professora:** Então qual seria a expressão dos múltiplos de quatro incluindo o zero?
> **Alunos:** $4n - 4$ ou $4(n - 1)$.

No quadro interactivo foram registadas estas duas expressões equivalentes (Figura 11).


à uma sucessão de termo geral **4n**.

A professora pergunta ao Joãozinho a expressão geral dos múltiplos de 4. Ajuda-o a encontrar esta expressão. Sabes qual é?

$4n-4=4(n-1)$

Figura 11 – Excerto do que foi projectado e registado no quadro interactivo

Tendo em consideração as questões do estudo, depois desta análise, pode-se concluir que se notou uma evolução do grupo no estabelecimento de conexões com a representação geométrica dos termos da sucessão. Olhando para a sucessão como figuras geométricas, os alunos aprenderam a estabelecer relação entre a ordem e o termo da sucessão. Portanto, a representação geométrica nesta tarefa contribuiu, de uma forma benéfica, para determinar o termo geral da sucessão dos números quadrados. Verificou-se com esta tarefa que as representações utilizadas foram a geométrica, verbal, numérica e analítica. Não se pode concluir ainda, qual é a representação mais utilizada pelos alunos na realização duma determinada questão. O que se pode concluir com esta tarefa é que a conexão entre o contexto do problema para a representação verbal e desta para a representação numérica não apresentou grandes dificuldades. Contudo, estas conexões estabelecidas facilitaram a ultrapassagem das dificuldades na conexão entre a representação numérica e analítica que foi mais difícil de estabelecer. No estabelecimento destas conexões, os alunos ainda revelam dificuldades, mas conseguem ultrapassá-las e passar para uma representação analítica. Estas dificuldades foram ultrapassadas também devido a uma boa interacção entre os alunos do grupo, embora o João ainda não consiga ultrapassá-las, continuando a revelar dificuldades em relacionar a ordem com o termo.

5.3. Análise da Tarefa 3

O objectivo principal desta tarefa foi a introdução da definição por recorrência duma sucessão. Atendendo à problemática do meu estudo, outro objectivo da tarefa foi verificar em que representações se baseiam mais os alunos, como estabelecem conexões entre elas e se há algum novo tipo de conexões estabelecidas pelo grupo, durante a actividade desenvolvida na aula.

Devido ao tempo, esta tarefa começou a ser discutida na aula em que se realizou, e continuou a ser discutida na aula seguinte.

Na primeira questão pedia-se para observar três sucessões. A segunda questão da tarefa tinha três alíneas. Na primeira alínea, pedia-se para determinar, caso fosse possível, uma expressão para as sucessões examinadas na primeira questão. Para a primeira sucessão o grupo passou por duas etapas. Na primeira, apresentaram o seguinte termo geral (Figura 12).

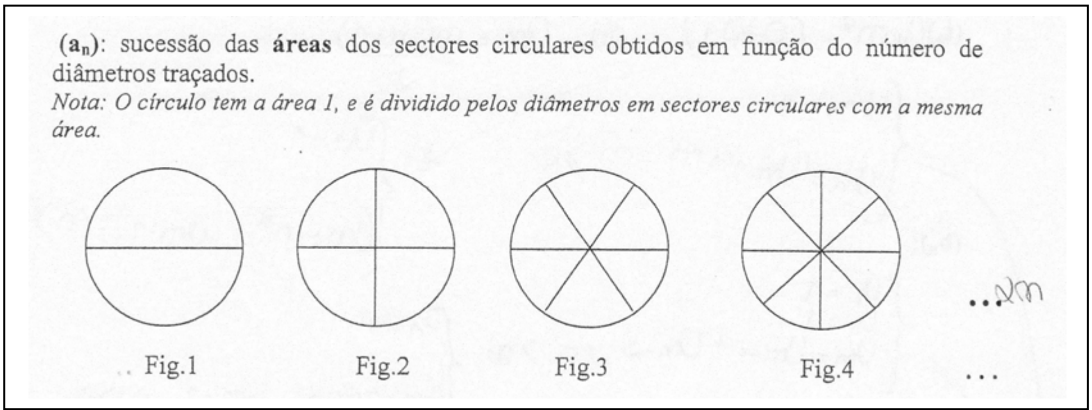


Figura 12 – A expressão para o termo geral da sucessão das áreas dos sectores circulares apresentada pelo grupo na primeira etapa.

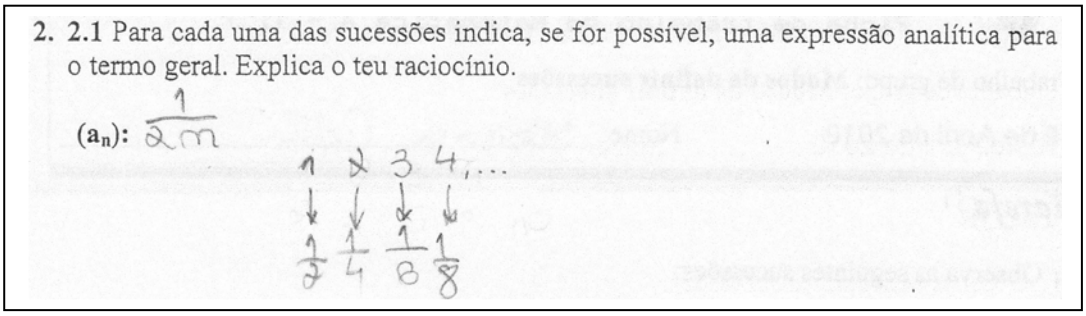
Este termo geral foi elaborado pelo grupo contando o número de sectores circulares de cada figura:

Filipe: Então temos 2, 4, 6, 8, …é ***2n***.
Ana: Boa.

Na segunda etapa, os alunos tentaram ler o enunciado mais uma vez para verificar a conjectura, e concluíram que tinham errado:

> **Filipe:** Mas isso é área. Primeira é um meio. Segunda é um sobre quatro.
> **Carlos:** Então é um meio, um quarto,…É $\frac{1}{2n}$.
> **João:** Ah…, exacto.
> **Ana:** Exacto, és o máximo. Quando $n = 1$, vai dar um meio.
> **João:** Quando $n = 2$, vai dar um quarto. Quando $n = 3$, vai dar um sexto.
> **Ana:** Exacto.

A seguir apresentaram a seguinte resolução (Figura 13).


2. 2.1 Para cada uma das sucessões indica, se for possível, uma expressão analítica para o termo geral. Explica o teu raciocínio.

(a_n): $\frac{1}{2m}$

1 2 3 4,…

Figura 13 – A expressão para o termo geral da sucessão das áreas dos sectores circulares apresentada pelo grupo na primeira etapa.

O grupo saltou a segunda sucessão e passou para a sucessão de Fibonacci, para qual só conseguiram perceber a lei de formação:

> **Ana:** É, um mais um, dois. Dois mais um, três. Três mais dois, cinco. Cinco mais oito, treze.
> **Carlos:** Mas há dois um.
> **Ana:** Primeiro é um mais zero.
> **João:** E outro é o 34.

Voltando à segunda sucessão o grupo confrontou-se com dificuldades na passagem da representação geométrica para a analítica. Primeiro passaram para a representação numérica, contando o número de bolas. Depois tentaram elaborar uma estratégia para estabelecer conexão entre a representação numérica e analítica:

1. **Filipe:** Aqui temos um, três,…
2. **João:** Temos que arranjar uma maneira.
3. **Ana:** Aqui temos uma bola, depois três bolas,…
4. **João:** É 2^{n-1}
5. **Carlos:** Não dá, …

Estabelecendo conexão entre a representação geométrica dos números quadrados e a representação geométrica dos números triangulares, o grupo deparou-se com a dificuldade de encontrar a relação entre a ordem e o comprimento do lado (falas 1, 2). Relacionando o quadrado e o triângulo como figuras geométricas e pensando em áreas (falas 8-11), chegam à conclusão que devem dividir por dois área do quadrado (fala 12) e assim tentam testar a conjectura estabelecida (fala 14). O grupo verifica que a expressão obtida não é termo da sucessão dos números triangulares (falas 14-16).

6. **Filipe:** Como é que nós escrevemos matematicamente que o ***n*** corresponde aos lados?
7. **Carlos:** Base, vezes altura. O ***n*** é o número de bolas por lado.
8. **Filipe:** Ah isso aqui é como se fosse um quadrado. Então vamos imaginar que isto aqui são quadrados.
9. **Ana:** A?
10. **Filipe:** Portanto a área é n^2.
11. **Ana:** Sim.
12. **Filipe:** Só que como isto é um triângulo, é a dividir por dois.
13. **Carlos:** Tens a certeza?
14. **João:** Vamos experimentar. Fica $\frac{n^2}{2}$? Não, mas logo o primeiro fica um meio.
15. **Carlos:** Não dá.
16. **João:** Pois…

Como não conseguiram chegar a uma expressão que dava para calcular qualquer termo da sucessão, o grupo pensou definir a sucessão a partir do termo anterior:

17. **Ana:** Então é $n^2 - n$. Não, dois ao quadrado é quatro. Menos um dá três. Esse ao quadrado menos esse dá esse, esse ao quadrado menos esse dá esse,…Percebem?
18. **Carlos, Filipe, João:** Não.
19. **Ana:** Três ao quadrado dá nove, menos três, dá seis. Quatro ao quadrado dá 16, menos 6 dá dez.
20. **Filipe:** Portanto cinco ao quadrado dá 25, menos 10 dá 15.
21. **Carlos:** Já dá? Como é que é?
22. **Ana:** É n^2 dá 4 menos o anterior, dá o actual.

Para definir um termo a partir do seu anterior, os alunos depararam-se com dificuldades na notação do termo anterior duma sucessão (falas 25-29). Os alunos recorrem à ajuda da professora (fala 30), e depois de algumas tentativas percebem como se indica o termo anterior (falas 32, 34). Desta forma escrevem a expressão elaborada (fala 38).

23. **João:** Então é menos: $n - 1$.
24. **Ana:** Não. Ah é, é. Percebes João?
25. **João:** Não, como é que é isso do termo anterior?
26. **Filipe:** Então é $n^2 - (n - 1)$.
27. **João:** Não, não é.

28. **Ana:** Porquê $n-1$? … . Ah, pois é! Já está!
29. **João:** Não é nada $n-1$. Como é que $n-1$.
30. **Filipe:** Já descobrimos, professora. Como é que é quando precisamos do termo anterior?
31. **Professora:** Se este é a_n, o anterior seria …
32. **João:** Ah, já sei é a_{n-1}. Não é?
33. **Ana:** Então fica n^2menos n índice,…. Como é que é?
34. **Filipe:** Acho que em vez de $n-1$, é a_{n-1}.
35. **Carlos:** Está bem assim?
36. **Ana:** O raciocínio está bem, a expressão é que está mal.
37. **João:** Como é que é a expressão?
38. **Carlos:** Então é $a_n = n^2 - a_{n-1}$
39. **Ana:** Já está.

Ultrapassando as dificuldades, o grupo conseguiu definir a sucessão dos números triangulares por recorrência, sem indicar para que valores é válida a expressão nem qual é o primeiro termo (Figura 14).

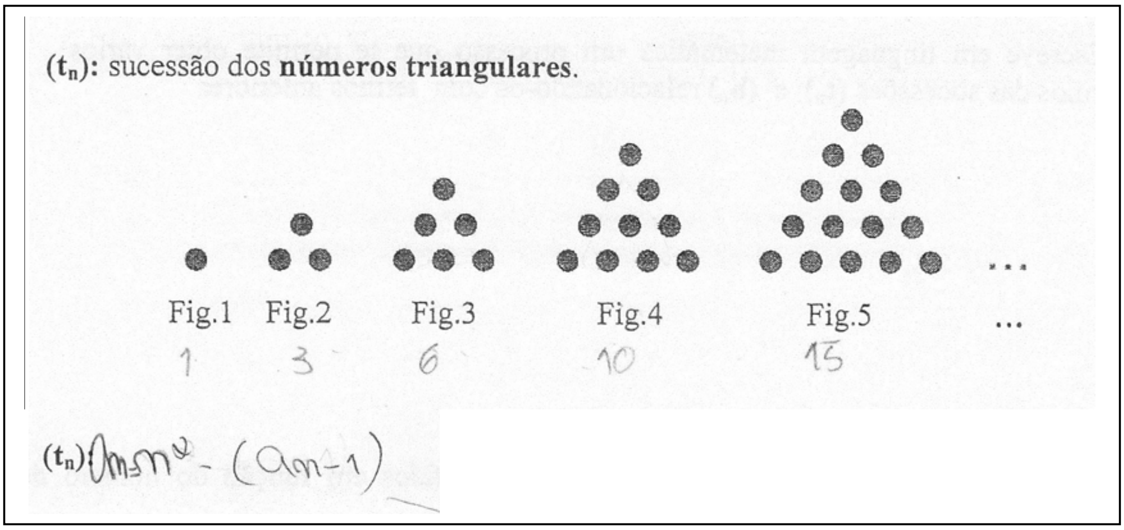


Figura 14 – Definição por recorrência apresentada pelo grupo para a segunda sucessão.

Esta expressão foi discutida numa outra aula. Com uma posição diferente dos números triangulares, conseguiu-se ilustrar geometricamente este raciocínio. Um excerto do registo da respectiva aula, do caderno do Carlos, ilustra este raciocínio (Figura 15).

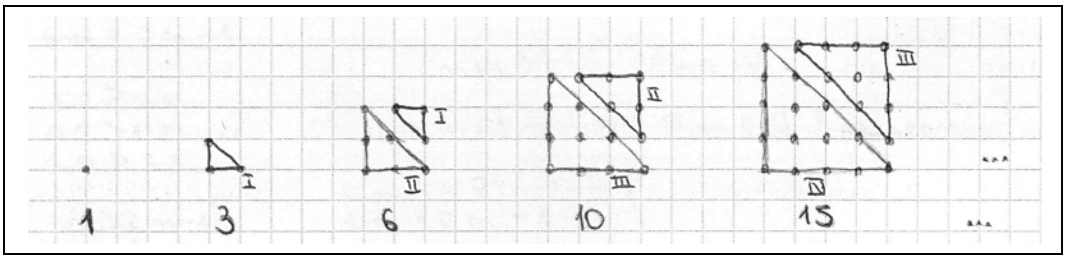


Figura 15 – Ilustração do raciocínio por recorrência apresentado pelo grupo

Com esta tarefa verificou-se uma evolução dos alunos no estabelecimento de conexões entre a representação numérica e analítica. Os alunos, começaram a estabelecer conexões entre figuras geométricas, para conseguir generalizar e chegar a uma expressão analítica. Estas conexões ajudaram os alunos a elaborar uma estratégia para definir a sucessão dos números triangulares por recorrência.

À luz do objectivo do meu estudo, posso concluir que o apelo às representações geométricas facilitou a elaboração de uma estratégia para definir a sucessão dos números triangulares por recorrência. A conexão entre as figuras geométricas, neste caso quadrado e triângulo, foi um novo tipo de conexão construída pelos alunos. Além disso, a representação geométrica facilitou a elaboração do raciocínio, para determinar o termo geral da sucessão das áreas dos sectores circulares. A representação gráfica não foi discutida pelo grupo. Logo, não se pode concluir ainda nada sobre o uso desta representação.

Nesta tarefa, as expressões analíticas elaboradas para as sucessões examinadas, serviram para evidenciar a relação entre a ordem e o termo da sucessão.

Nesta tarefa verifica-se a utilização da representação geométrica para definir as sucessões, sempre acompanhada pela representação numérica, como passo intermédio entre a representação geométrica e analítica.

As principais dificuldades observadas foram na identificação simbólica do termo anterior duma sucessão, que foram ultrapassadas pela análise das conjecturas elaboradas, e a discussão em grupo e também apelando ao apoio do professor. Ainda se observaram algumas dificuldades em relacionar a ordem com o termo, mas estas foram bem ultrapassadas devido à interacção entre os alunos do grupo e devido a um conjunto de problemas já resolvidos. Algumas dificuldades reveladas pelo grupo incidiram na comunicação matemática. Os alunos não conseguem justificar e explicar com rigor os seus raciocínios.

5.4. Análise da Tarefa 4

A análise da Tarefa 4 baseia-se nos excertos tirados dos cadernos dos alunos, e nas discussões em grande grupo, onde os alunos participaram. A tarefa foi projectada no quadro e os alunos trabalharam em pares, registando as resoluções nos cadernos. O Carlos e a Ana formaram um par e o Filipe e o João outro par.

O objectivo desta tarefa foi o estudo intuitivo da monotonia duma sucessão, pela enumeração dos termos e por processos analíticos. Quanto à problemática do meu estudo, pretendi verificar de que modo as representações geométricas, analíticas e gráficas ajudam os alunos no estudo das sucessões monótonas.

A primeira parte da tarefa apelava à intuição. Com base nas figuras geométricas, os alunos conseguiram concluir qual das sucessões dadas é monótona crescente e qual é monótona decrescente.

Passando para a segunda parte que é composta por três exemplos, os alunos concluíram por enumeração dos termos que a sucessão dos números triangulares, do primeiro exemplo, é monótona crescente:

> **Professora:** Porquê é que acham que esta sucessão é monótona crescente?
> **Ana:** À medida que o ***n*** cresce, os termos da sucessão estão a crescer.

No segundo exemplo, dada a representação geométrica da sucessão, os alunos concluíram que é uma sucessão monótona decrescente:

> **Aluno 1:** É…, decrescente.
> **Aluno 2:** Vai diminuindo, à medida que o ***n*** aumenta.

Para o exemplo três, foram dados alguns minutos para os alunos verificarem se a sucessão é monótona. O Carlos foi ao quadro e mostrou a resolução elaborada em par com a Ana e que foi registada também nos cadernos (Figura 16).

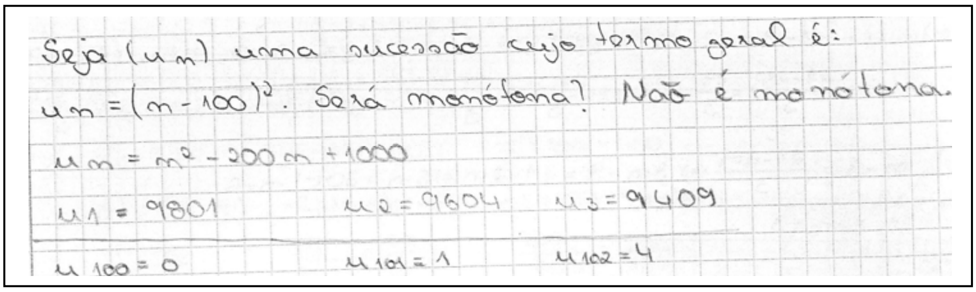

Seja (u_n) uma sucessão cujo termo geral é:
$u_n = (n-100)^2$. Será monótona? Não é monótona.
$u_n = n^2 - 200n + 1000$
$u_1 = 9801$ $u_2 = 9604$ $u_3 = 9409$
$u_{100} = 0$ $u_{101} = 1$ $u_{102} = 4$

Figura 16 – Excerto do caderno do Carlos, referente ao Exemplo 3 da Tarefa 4

No início do seu raciocínio, o Carlos baseia-se na representação analítica e passa para a representação numérica da sucessão:

> **João:** É decrescente.
> **Carlos:** A sucessão é decrescente.
> **Professora:** Justifica.
> **Carlos:** Então quando o ***n*** aumenta isto aqui diminui. Mas …há uma altura quando inversa.

A seguir, o Carlos estabelece conexão entre a representação analítica da sucessão e a representação gráfica:

> **Professora:** Então achas que a sucessão é decrescente?
> **Carlos:** Não, isso é uma parábola.
> **Ana:** São pontos isolados duma parábola.

A conclusão do Carlos é baseada na conexão que foi estabelecida com as funções quadráticas:

> **Professora:** Não percebi, a sucessão é crescente ou é decrescente?
> **Carlos:** Há uma altura onde cresce e outra onde decresce.

O par Filipe e João calcularam os termos da sucessão de seguinte forma (Figura 17).

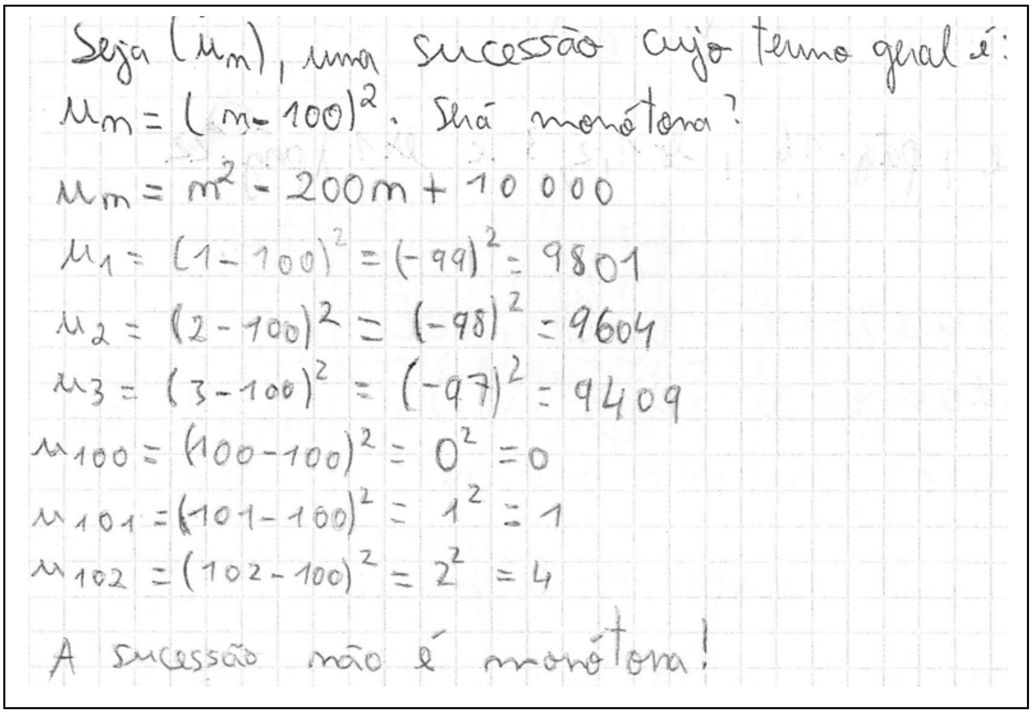

Seja (u_n), uma sucessão cujo termo geral é:
$u_n = (n-100)^2$. Será monótona?
$u_n = n^2 - 200n + 10\,000$
$u_1 = (1-100)^2 = (-99)^2 = 9801$
$u_2 = (2-100)^2 = (-98)^2 = 9604$
$u_3 = (3-100)^2 = (-97)^2 = 9409$
$u_{100} = (100-100)^2 = 0^2 = 0$
$u_{101} = (101-100)^2 = 1^2 = 1$
$u_{102} = (102-100)^2 = 2^2 = 4$
A sucessão não é monótona!

Figura 17 – Excerto do caderno do Filipe, referente ao Exemplo 3 da Tarefa 4

Um aluno da turma apresentou no quadro uma resolução semelhante ao do par João e Filipe. A conclusão registada sobre a monotonia da sucessão foi tirada durante a discussão em grande grupo:

> **Professora:** Qual é a conclusão que tiramos destas duas resoluções.
> **Aluno 1:** Não é monótona.
> **Professora:** Porquê?
> **Aluno 1:** Porque a partir do 100.º termo começa a crescer.

Após uma explicação de como se prova analiticamente a monotonia duma sucessão, o Filipe pediu para ir ao quadro e ilustrou a resolução elaborada em par com o João (Figura 18).

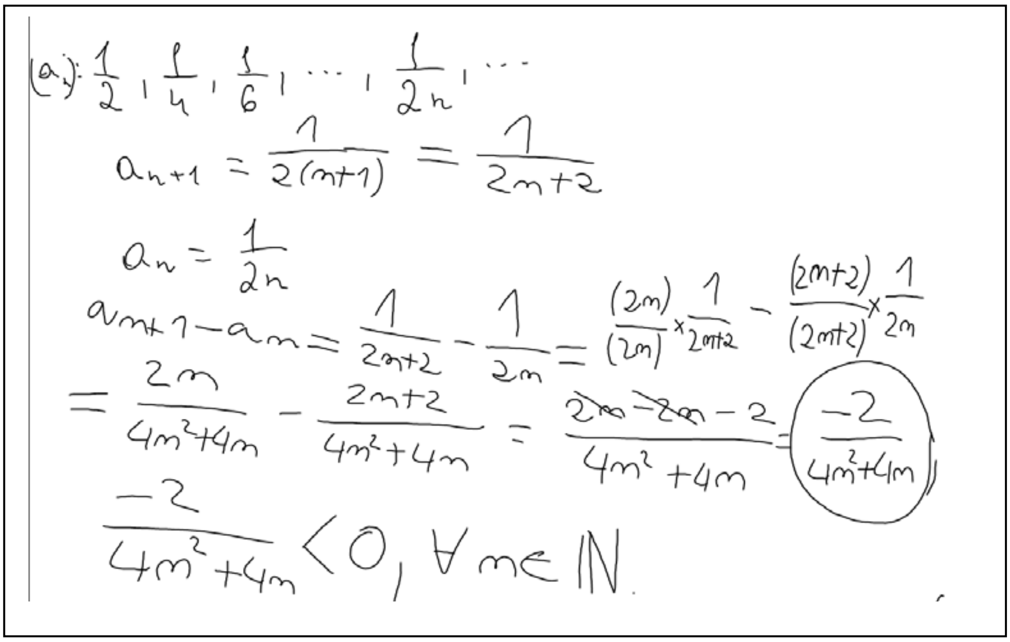


Figura 18 – Demonstração analítica realizada pelo par Filipe e João, referente à monotonia da sucessão do Exemplo 2 no quadro interactivo

> **Filipe:** A expressão obtida é menor que zero.
> **Aluno:** Pois, um número negativo dividido por um positivo é negativo.
> **João:** Então é decrescente.

Em síntese, os alunos têm tendência para recorrer mais vezes à representação numérica, mas na realização desta tarefa, tiveram que passar para as outras representações (gráfica, geométrica e analítica) que lhe forneceram mais dados sobre o comportamento dos termos da sucessão. O recurso à representação numérica originou alguns enganos na decisão sobre a monotonia da sucessão. A conexão entre a representação analítica e a gráfica contribuiu para esclarecer as dúvidas em relação à monotonia. Os alunos aprenderam o processo analítico para o estudo da monotonia duma sucessão, apresentando algumas dificuldades no cálculo algébrico. Verificou-se ainda que o recurso às representações geométricas e gráficas das sucessões facilitou o estudo da monotonia das sucessões. A representação numérica no estudo da monotonia das sucessões é benéfica para os casos em que se encontra um contra-exemplo para decidir que a sucessão não é monótona. A abordagem analítica permite fazer, com maior rigor, o estudo da monotonia das sucessões.

As principais dificuldades reveladas pelos alunos centram-se na utilização da nomenclatura própria para as sucessões, nas transformações algébricas, na conexão entre a representação analítica e gráfica, devido à sucessão como uma restrição da função. Outra dificuldade verificada foi na comunicação matemática durante a discussão em grande grupo.

5.5. Análise da Tarefa 6 (Ditado Matemático)

Os objectivos desta tarefa foram verificar como os alunos aprenderam a utilizar a nomenclatura própria para as sucessões, analisar se os alunos ainda encontram dificuldades na passagem duma dada representação para a analítica e perceber se os alunos sabem identificar sucessões monótonas e não monótonas.

Dado a tarefa ter sido realizada individualmente, vou comparar as resoluções dos alunos, focando-me em cada questão.

Na transição da linguagem verbal para a analítica os alunos em estudo, não apresentaram dificuldades. No entanto, o João ainda nem sempre utiliza a simbologia adequada para as sucessões. (Figura 19).

Indica o termo geral da sucessão:

1) Do número de dedos em *n* – mãos

Ana

① a) $a_n = 5n$

B) Monotona crescente

Filipe

a) $a_n = 5n$

b) Mono tona crescente

João

1 a) $5n$

b) Monotona crescente

Carlos

a) $a_n = 5n$

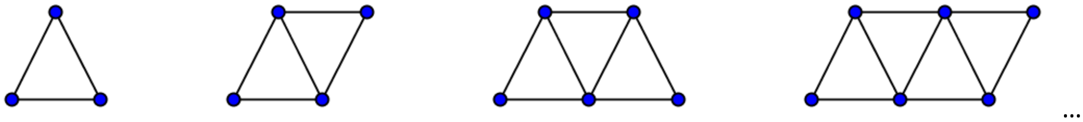
b) Monotona crescente

Figura 19 – Os registos dos alunos do grupo relativamente à primeira questão da Tarefa 6

Os alunos conseguiram determinar o termo geral da sucessão a partir da representação geométrica (Figura 20).

Indica o termo geral da sucessão:

2) Do número de fósforos da figura de ordem ***n***?



Ana

a) $\begin{cases} a_n = 1 \\ a_n = a_{n-1} + 2 \end{cases}$ a) $a_n = 2n + 1$

b) Monótona Crescente

João

a) $2n+1$

b) Monótona crescente

Filipe

a) $b_n = 2n + 1$

b) Monótona crescente

Carlos

a) $b_n = 2n + 1$

b) Monótona crescente

Figura 19 – Os registos dos alunos do grupo relativamente à segunda questão da Tarefa 6

A Ana elaborou duas definições da sucessão do número de fósforos: pelo termo geral e por recorrência. A Ana na definição por recorrência não indicou o primeiro termo correctamente e não explicou para que valores de ***n*** é válida a expressão definida. O João voltou a indicar o termo geral correctamente, sem indicar o nome da sucessão.

Na transição da representação numérica para a analítica apareceram algumas dificuldades no caso duma sucessão que era não monótona (Figura 20).

Indica o termo geral da sucessão:

6) Cujos quatro primeiros termos são:

$$2, -2, 2, -2, 2, -2\ \ldots$$

Ana

a) $a_n=(-1)^n\times(-2)$

b) Não é monotona

Filipe

a) $a_m=\frac{(-1)}{n}\times(-2)$

b) Não monotona

João

b)

a) $\rightarrow \begin{cases}\left(\frac{1}{n}\times n\right)\times 2\\ \left(-\frac{1}{n}\times n\right)\times -2\end{cases}$

b) Monotona

Carlos

a) $f_n=(-1)^n\times(-2)$

b) Não monótona

Figura 20 – Os registos dos alunos do grupo relativamente à sexta questão da Tarefa 6

O Carlos e a Ana conseguiram solucionar bem esta questão, indicando a mesma expressão para o termo geral da sucessão. O Filipe tentou passar da representação numérica para a analítica, mas escreveu uma expressão incorrecta. O João concluiu bem que a sucessão não é monótona, entretanto, apresenta maiores dificuldades em determinar o termo geral da sucessão em relação aos colegas. O mesmo tentou estabelecer conexões com funções definidas por ramos, mas não resultou.

Nas últimas três questões, verifica-se que os alunos recorrem às representações analíticas com mais frequência, no entanto o Filipe constrói na sétima questão uma representação geométrica e na nona, uma representação numérica (Figura 21).

Dá um exemplo de uma sucessão:

7) a_n - monótono crescente

8) b_n – monótona decrescente

9) c_n - não monótona

Utilize figuras, pontos, números, símbolos, gráficos, etc.

Ana

7 $a_n = 2n + 3$

8 $b_n = 1 - n$

9 $c_n = (-1)^n$

Filipe

7 7) $a_n = 2n$

8) $b_n = \frac{-1}{2n^2+6n}$

9) $1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots$

$c_n = (-1)^{n-1}$

João

7. $a_n = 2n$

8. $b_n = \frac{2}{n}$

9 $C_n = \frac{n}{n}$

Carlos

7: $a_n = 50n$

8: $b_n = \frac{1}{50n}$

9: $c_n = (-1)^n$

Figura 21 - Os registos dos alunos do grupo relativamente às questões 7, 8, 9 da Tarefa 6

Para uma sucessão monótona decrescente só a Ana apresenta uma expressão analítica linear, enquanto os seus colegas recorrem à representação analítica fraccionária. Nesta questão, o Filipe tentou elaborar uma expressão mais complicada, mas não consegue. Assim conclui erradamente que esta expressão representa uma sucessão monótona decrescente. Para a última questão todos os alunos, a excepção do João, apresentam uma sucessão não monótona, com base numa potência de -1. O João foi o único que indicou erradamente para esta questão, um termo geral que dá origem a uma sucessão monótona em sentido lato, o que não está no programa deste ano de escolaridade.

A análise desta tarefa mostra que a maioria dos alunos do grupo sabem utilizar a nomenclatura própria para as sucessões e sabem identificar sucessões monótonas e não monótonas. Para as sucessões não monótonas encontram algumas dificuldades em estabelecer conexões entre a representação numérica e analítica. Revelam ainda algumas dificuldades no estabelecimento de conexões com as funções, o que pode explicar porque é que apresentam expressões erradas para o termo geral da sucessão.

Com base no objectivo do meu estudo e feita uma análise da Tarefa 6, posso concluir que para representar uma sucessão definida verbalmente, geometricamente ou pela enumeração dos termos, os alunos utilizam na maior parte a representação analítica. Esta última possibilita verificar os termos da sucessão. O recurso à representação geométrica não mostra quaisquer dificuldades, sendo a representação numérica um passo intermédio para a passagem à representação analítica.

Devido à natureza da tarefa não se pode verificar como os alunos ultrapassam as dificuldades acima referidas, mas observou-se que os alunos recorreram à calculadora gráfica e utilizaram os cadernos diários, o que lhe foi permitido antes do início do ditado.

5.6. Análise da Tarefa 7

O objectivo desta tarefa foi a introdução dos conceitos de sucessão limitada, majorantes e minorantes. À luz do problema em estudo, a tarefa tem como objectivo verificar como os alunos estabelecem conexões entre conceitos já estudados, para determinar o termo geral duma sucessão.

Na primeira questão da tarefa, foi pedido para determinar o termo geral da sucessão das áreas dos polígonos inscritos numa circunferência, tendo como ponto de partida o valor exacto e o valor aproximado da área do triângulo. Os alunos deveriam relacionar os ângulos com os lados para determinar a área de cada polígono com o número indicado de lados na tabela. O grupo estabeleceu algumas relações como se pode observar na figura seguinte (Figura 22).

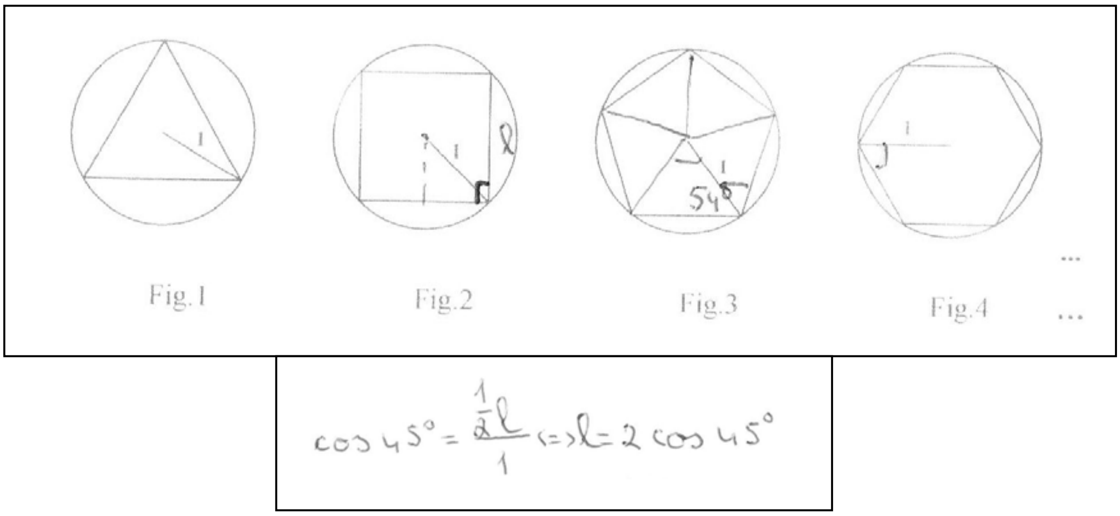


Figura 22 – Parte da realização da primeira questão da Tarefa 7 pelo grupo.

Estabelecendo conexões com conceitos já estudados de trigonometria e continuando o mesmo raciocínio, observa-se a seguinte interacção entre os colegas. O Filipe calcula o lado do quadrado aplicando o teorema do Pitágoras (fala 3), enquanto o Carlos aplica a trigonometria (fala 2). A seguir chegam à conclusão que a área do quadrado é dois (fala 5). Entretanto, como a Ana e o João estavam com dúvidas, o Filipe e o Carlos tentam esclarecê-los (falas 6-13):

1. **Filipe:** Mas podemos fazer com Teorema do Pitágoras.
2. **Carlos:** Agora temos que relacionar com essa área? Portanto o lado do quadrado será $2\cos 45^0$. Agora é a área.
3. **Filipe:** Pois, o valor exacto dá dois pelo teorema do Pitágoras.
4. **Ana:** Então a área é $(2\cos 45^0)^2$. Quanto é que é?
5. **Carlos:** Ah, já sei vai ser $4\cos^2 45^0$. Isso dá dois?
6. **Ana:** Não percebi de onde é que é isso.
7. **Filipe:** Então 2^2=4 e $\cos 45^0$ ao quadrado dá $\cos^2 45^0$.
8. **Ana:** Ah, está bem.
9. **João:** Não percebo.
10. **Ana:** Ele está a fazer isso. Portanto isto aqui, é 2.
11. **Carlos:** Se isto é l, então esta parte é $\frac{l}{2}$.
12. **Filipe:** Como $\frac{l}{2}$é $\cos 45^0$, então o $l = 2\cos 45^0$.
13. **João:** Portanto, a área é $(2\cos 45^0)^2$.

O grupo avança para o cálculo da área do pentágono dividindo-o em triângulos e tentam classificar os triângulos quanto aos lados (falas 15-17). A seguir os alunos do grupo relacionam os ângulos, tentando chegar a uma generalização (falas 18-22):

14. **Carlos:** Agora como é que é?

15. **João:** Isto aqui divide-se em triângulos isósceles.
16. **Carlos:** Não, equiláteros.
17. **João:** Não, os equiláteros são no… hexágono.
18. **Filipe:** Temos 360 a dividir por 5.
19. **Carlos:** Agora divide-se isso por dois. Isso dá 54. Este ângulo aqui é 54.
20. **João:** Ah, Ok. Mas porquê temos que relacionar?
21. **Ana:** Para chegar ao termo geral.
22. **Filipe:** Olham, o $\cos 45^0 = \sin 45^0$ que é $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Então temos $4(\cos 45^0)\,(\sin 45^0)$.
23. **Carlos:** Ah, exacto.

Percebendo que deve haver uma relação entre o número de lados e a amplitude dos ângulos que os ajudará a elaborar uma expressão para todos os polígonos (falas 25, 26, 27), continuam a procurar relações entre os ângulos e os lados para elaborar uma expressão semelhante ao do triângulo (fala 34):

24. **João:** Então agora como é que vamos fazer?
25. **Filipe:** Eu acho que aqui vai dar 5 vezes qualquer coisa.
26. **João:** Pois, eu também acho.
27. **Carlos:** Olham aqui vai dar 6 $(\cos 60^0\,)(\sin 60^0)$.
28. **João:** Não, é 60^0.
29. **Ana:** Aqui é 30^0, …, aqui é 45^0. Aqui…
30. **Carlos:** É 54^0. Ana, percebes?
31. **Ana:** Não estou a perceber aqui nada. Esta expressão é para o triângulo.
32. **Carlos:** Sim. Olha aqui é $30 = \frac{60}{2}$. Depois $45 = \frac{90}{2}$.
33. **João:** Mas ainda não fizemos para $n = 5$?
34. **Carlos:** Então, vamos ter 5 $(\cos 54^0\,)(\sin 54^0)$.

Por fim, conseguem passar para a representação analítica:

35. **Ana:** Pronto, já percebi.
36. **João:** Então isto vai ser sempre vezes o número de lados. Reparem numa coisa…aqui será sempre a dividir por dois.
37. **Filipe:** Então podemos meter a expressão geral.
38. **Carlos:** Portanto vai ser $n\left(\cos\frac{180-\frac{360}{n}}{2}\right)\left(\sin\frac{180-\frac{360}{n}}{2}\right)$

A seguir preencheram a tabela desta forma (Figura 23).

n	Valor exacto da área	Valor aproximado da área
3	$3\cos 30^0 \sin 30^0$	1.2990
4	$4(\cos 45^\circ)(\sin 45^\circ)$	2
5	$5(\cos 54^\circ)(\sin 54^\circ)$	2,3776
6	$6(\cos 60^\circ)(\sin 60^\circ)$	2,5981
…		
10	$10(\cos 72^\circ)(\sin 72^\circ)$	2,9389
…		
60	$60(\cos 87^\circ)(\sin 87^\circ)$	3,1359
…		
180	$180(\cos 89^\circ)(\sin 89^\circ)$	3,1409
…		
n	$m\left(\cos \frac{180-\frac{360}{n}}{2}\right)\left(\sin \frac{180-\frac{360}{n}}{2}\right)$	

Figura 23 – Tabela correspondente à primeira questão da Tarefa 7

O João, tendo dúvidas em relação à expressão analítica elaborada (fala 38), recorre à ajuda dos colegas (falas 39, 41):

39. **João:** Mas como é que vocês chegaram à isto?
40. **Carlos:** Então repare, fazemos esta fórmula $180 - \frac{360}{n}$ e depois divides por dois e descobres o ângulo, e depois…
41. **João:** Mas porquê divides por dois?
42. **Carlos:** Então descobres este ângulo todo, e depois divides por dois.
43. **João:** Ah, …, sim. Estava a confundir.

Depois de determinar o termo geral, o grupo voltou a preencher a tabela, para os outros valores de ***n***:

44. **Carlos:** Aqui vai dar 72, depois …
45. **Filipe:** Aqui é 87, e por último 89.

Na segunda parte da primeira questão, o grupo observa que os valores aproximados das áreas tendem para π (falas 46 - 48). A seguir, percebem que a sucessão das áreas se aproxima de π de forma crescente (falas 49, 50). Percebendo que os termos da sucessão nunca atingirão este valor (fala 50), os alunos tentam substituir mais um valores na expressão analítica elaborada, para testar a conjectura estabelecida em relação às aproximações ao valor de π (fala 52). Na fala 53, o grupo encontra a justificação para esta aproximação, estabelecendo conexões com a área do círculo de raio 1. A seguir os alunos tentam relacionar esta aproximação com as amplitudes dos ângulos (falas 54, 56):

46. **Filipe:** Tem alguma coisa com o π.
47. **Ana:** Olham, isso aqui é o π.
48. **Filipe:** Vai se aproximando-se do π.
49. **Carlos:** Do π , é? Então as áreas estão a aumentar.
50. **Filipe:** A área esta a aumentar e nunca chega à π.
51. **João:** Só quando chega ao infinito. É engraçado.
52. **Carlos:** É, não é? Agora faz para 360, para ver se ainda se aproxima mais?
53. **João:** Pois, aproxíma-se, porque a área do círculo de raio um é π.
54. **Carlos:** Pois, isso aqui aproxima-se cada vez mais de 90. Quando for 90?
55. **Ana:** A área dá zero.
56. **Filipe:** A medida que ***n*** cresce, o ângulo aproxima-se cada vez mais de 90, então…
57. **Carlos:** A área vai se aproximando cada vez mais de π.

Depois de analisarem as aproximações ao valor de π, o grupo apresenta esta justificação (Figura 24).

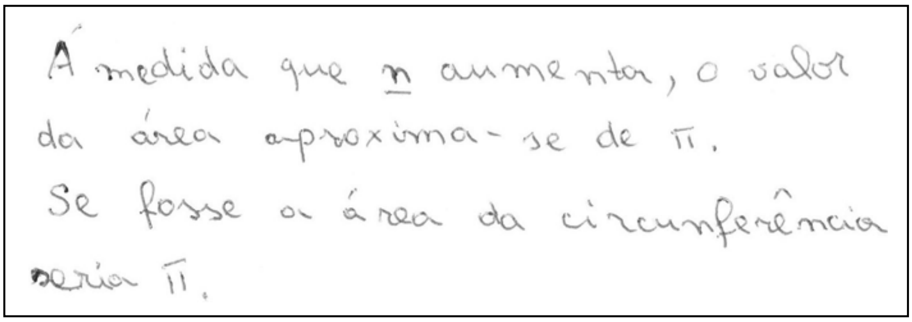


Figura 24 – Justificação correspondente à primeira questão da Tarefa 7

Passando para a segunda questão, verifica-se que o grupo tenta passar logo para as expressões das áreas exactas, baseando-se no que fizeram na questão anterior (falas 58, 59). Nesta passagem rápida, o João começa a participar (fala 58), mas depois acha que a passagem para a expressão do termo geral foi rápida (fala 61). Dispondo de pouco tempo, o grupo avançou sem dar importância à observação do João, e escreveu a expressão para o termo geral (fala 62):

58. **João:** Aqui, em vez de multiplicar é dividir.
59. **Ana:** Já sei, aqui será 4 a dividir por $\tan 45^0$.
60. **Carlos:** Pois, pois.
61. **João:** Ah… Como é que fizeram, vocês andam muito depressa.
62. **Carlos:** Então o termo geral será $\frac{n}{\tan\left(\frac{180-\frac{360}{n}}{2}\right)}$.

Como o tempo para realização da tarefa estava no fim, os alunos dividiram o trabalho entre eles:

63. **João:** Agora temos que fazer as contas para cada caso.
64. **Carlos:** Eu faço para 5.
65. **Filipe:** Eu faço para 10.
66. **João:** Eu faço para 180.

…

E apresentaram o seguinte registo (Figura 25).

n	Valor exacto da área	Valor aproximado da área
3	$\frac{3}{\tan 30^\circ}$	5.1962
4	$\frac{4}{\tan 45^\circ}$	4
5	$\frac{5}{\tan 54^\circ}$	3,6327
6	$\frac{6}{\tan 60}$	3,4641
…		
10	$\frac{10}{\tan 72}$	3,2492
…		
60	$\frac{60}{\tan 87^\circ}$	3,1445
…		
180	$\frac{180}{\tan 89^\circ}$	3,1419
…		
n	$\frac{n}{\tan\left(\frac{180-\frac{360}{n}}{2}\right)}$	

Figura 25 - Tabela correspondente à segunda questão da Tarefa 7

Analisando o comportamento dos termos da sucessão, verifica-se o seguinte diálogo:

67. **Filipe:** Então, de que valor se aproximam as áreas?
68. **Ana:** Aproximam-se também do π, mas decrescendo.

O grupo apresenta esta conclusão (Figura 26).

Vai-se aproximando de π, à medida que n aumenta.

Figura 26 - Justificação correspondente à segunda questão da Tarefa 7

Os alunos deviam explicar nesta questão como as aproximações das áreas dos polígonos inscritos numa circunferência diferem das aproximações das áreas dos polígonos circunscritos a uma circunferência, questão que não foi abordada pelo grupo.

As expressões analíticas foram construídas para todos os valores da variável natural ***n***, sem considerar os primeiros dois termos. Assim, o termo geral obtido verificava-se para $n \geq 3$. Na discussão em grande grupo, levantando esta questão, os alunos perceberam que para que o termo geral fosse válido para todos os valores de ***n*** teria que ser alterada a expressão e em vez de ***n*** substituía-se por ***n+2***.

Esta análise permite-me concluir que os alunos conseguiram estabelecer conexões entre os conceitos estudados, relacionaram os elementos dos polígonos e chegaram, validando conjecturas, às expressões para os termos gerais das sucessões propostas.

Os alunos utilizaram as representações geométricas para determinar os termos gerais das sucessões propostas e aprenderam outra forma de calcular a área dos polígonos regulares inscritos e circunscritos a uma circunferência de raio 1. A expressão analítica sugerida ajudou os alunos a estabelecerem conexões entre a representação geométrica e a representação analítica dos termos da sucessão. Nesta tarefa, os alunos utilizaram a representação geométrica da sucessão e a expressão analítica sugerida para chegarem à generalizações.

As dificuldades que apresentaram foram mais frequentes no processo de passagem da representação geométrica para a analítica, verificando-se ainda algumas dificuldades em generalizar a situação e escrever os termos gerais das sucessões. Estas dificuldades foram ultrapassadas devido a uma boa interacção entre os elementos do grupo com apoio na expressão sugerida para o caso do triângulo.

Administrada para trabalho de casa, a análise da Tarefa 5 não foi realizada. Considerei conveniente não analisar, devido às possíveis influências de fora que os alunos poderiam ter na resolução da mesma.

Capítulo 6

Reflexão sobre o trabalho realizado

Neste capítulo, apresento as principais conclusões do estudo, à luz das questões apresentadas na problemática definida. Primeiro, vou analisar de que forma o recurso às representações geométricas e gráficas contribuíram para o estudo das sucessões. A seguir, vou evidenciar como a abordagem analítica contribuiu para aprendizagem dos conceitos ligados às sucessões reais. Outra questão que será analisada é qual o tipo de representações que é mais utilizado pelos alunos na realização das tarefas sobre sucessões. Por último, serão evidenciadas as principais dificuldades manifestadas pelos alunos face às tarefas propostas e como procuram ultrapassar estas dificuldades. Para cada questão do estudo, vou-me basear nos resultados obtidos neste trabalho, cruzando-os com estudos realizados por outros autores.

No final deste capítulo apresento uma reflexão sobre o trabalho desenvolvido, as eventuais dificuldades enfrentadas, as aprendizagens realizadas e possíveis recomendações para a continuação deste estudo.

6.1. Representações geométricas e gráficas

Geométrica. Numa primeira fase do estudo das sucessões, os alunos do grupo não recorreram à representação geométrica, e utilizaram a representação numérica das sucessões propostas. O grupo procurou encontrar um termo de uma determinada ordem, recorrendo aos termos anteriores. Continuando a insistir na proposta de tarefas que envolvem representações geométricas, os alunos começam a olhar para esta representação de uma outra forma. Relacionam as figuras entre elas, estabelecem conexões entre as representações, entre conceitos já conhecidos, chegando à representação simbólica, assim como é referido em NCTM (2009). As conexões construídas entre a representação geométrica dos números quadrados e dos números triangulares, sem se recorrer à representação numérica, dificultou a descoberta do termo geral. Nestes casos, tal como refere Bruner (1975), saltando várias etapas, o aluno pode correr o risco de não conseguir voltar para trás, como aconteceu com alguns alunos do grupo em várias tarefas. A conexão entre a representação gráfica e numérica, sem efectuar este salto, facilitou a elaboração da estratégia de definir a sucessão dos números triangulares por recorrência. Na realização da Tarefa 7, que se baseava numa representação geométrica, os alunos do grupo conseguiram estabelecer conexões entre vários conceitos e entre várias representações, para chegar ao termo geral da sucessão. A realização da Tarefa 7 foi facilitada, porque os alunos já tinham passado por várias tarefas e várias experiências matemáticas, confirmando o exposto no NCTM (2009).

A representação geométrica facilita a elaboração dos raciocínios, mas a mesma deverá ser utilizada em conexão com outras representações para conseguir generalizar uma determinada situação problemática. As representações geométricas facilitaram o estudo da monotonia das sucessões e permitiram descobrir novos tipos de relações, como aconteceu por exemplo na Tarefa 7. Esta tarefa permitiu aos alunos explorar através da representação geométrica o método descoberto por Arquimedes para chegar ao valor aproximado de π por defeito e por excesso.

Gráfica. A representação gráfica duma sucessão transmitiu aos alunos do grupo uma informação visual dos termos da sucessão, como aconteceu na Tarefa 1. A representação gráfica em conexão com a analítica permitiu aos alunos do grupo estudar o comportamento dos termos da sucessão quanto à monotonia, tal como referem Silva *et al*. (2002a) e NCTM (2008).

6.2. Abordagem analítica

Verifica-se que a abordagem analítica dos termos duma sucessão, ou seja a representação por uma expressão analítica, permitiu aos alunos do grupo construírem gráficos de sucessões com lápis e papel e recorrer à calculadora.

Além disso, uma vez encontrada a expressão analítica do termo geral, os alunos facilmente passam para a representação numérica. A abordagem analítica das sucessões contribuiu para evidenciar a relação entre a ordem e o termo da sucessão. Esta representação, assim como sublinha Bruner (1975), permitiu ao grupo que chegasse às propriedades abstractas das sucessões.

A abordagem analítica permitiu aos alunos fazer, com rigor, o estudo da monotonia duma sucessão. As conexões entre a representação analítica e gráfica permitiram esclarecer as dúvidas em relação à monotonia. Estas conexões tal como refere Mwakapenda (2008), facilitam o estudo das funções. É importante mencionar que a expressão algébrica sugerida na Tarefa 7, permitiu aos alunos estabelecerem conexões entre a representação geométrica e a representação analítica dos termos da sucessão. Interligando diversas ideias matemáticas, tal como refere NCTM (2008), dentro das conexões estabelecidas, os alunos compreenderam a forma como as ideias matemáticas se inter-relacionam e se constroem uma a partir de outra para produzir um todo coerente. Assim, os alunos conseguiram construir um modelo matemático, assim como destaca Ponte *et al.* (2007), para às áreas dos polígonos regulares inscritos e circunscritos a uma circunferência de raio 1, através do estudo das sucessões das áreas.

6.3. Representações utilizadas pelos alunos

Observou-se que os alunos durante a realização das tarefas passam por várias etapas, até chegar à representação simbólica, o que está de acordo com o referido por Bruner (1975). Durante a realização das tarefas, verificou-se que os alunos usaram, em várias situações, múltiplas representações. De um modo geral, os alunos recorreram às representações geométricas, verbais, numéricas, analíticas e gráficas. A variedade de representações e a ordem como são utilizadas, depende do problema matemático em si, e do modo como é apresentada aos alunos, tal como refere Schultz (2000). Nos problemas em que os termos da sucessão eram apresentados pela representação geométrica, os alunos normalmente passavam desta representação para a numérica e depois para a analítica. Verificou-se em alguns casos que os alunos tentaram passar logo da representação geométrica para a simbólica. Se num problema, os termos da sucessão eram apresentados através de uma representação numérica, os alunos tinham tendência de passar para a representação analítica, elaborando em algumas tarefas uma diversidade de expressões analíticas por vezes equivalentes, outras vezes não válidas. Nos problemas em que o conteúdo não apelava à nenhuma representação, os alunos tentavam inicialmente explicar o comportamento dos termos, pela representação verbal, a seguir passavam para a representação numérica e por último à representação analítica.

No estudo da monotonia da sucessão, as representações analítica e gráfica são as que os alunos aplicam mais vezes para entender o comportamento dos termos de uma sucessão. A representação numérica, neste caso, é utilizada para encontrar um contra-exemplo que mostra que a sucessão não é monótona. Para o estudo das sucessões limitadas, os alunos recorrem mais vezes às representações geométricas e gráficas.

O uso duma representação ou outra, permite, tal como afirma NCTM (2008), perceber o pensamento de cada aluno. A realização do ditado matemático permitiu-me perceber que, para representar sucessões definidas verbalmente, geometricamente ou pela enumeração dos termos, em geral, os alunos não encontram dificuldades em passar para a representação analítica. Algumas dificuldades manifestam-se para as sucessões não monótonas. A Ana e o Carlos sabem construir conexões entre várias representações. Os mesmos relacionaram correctamente, quase em todas as tarefas, o termo com a ordem, e moveram-se com flexibilidade para a representação analítica. O João, tendo algumas dificuldades em estabelecer conexões e relacionar os termos com a ordem, apresenta expressões erradas para as sucessões não monótonas, apresentadas pela enumeração e no caso quando é exigido um exemplo desta sucessão. O Filipe não tem dificuldades em estabelecer conexões entre várias representações, por isso apresenta sucessões usando também a representação geométrica e numérica. As dificuldades manifestadas pelo Filipe são no relacionamento entre a ordem e o termo, quando passa para a representação analítica, apresentando algumas expressões erradas.

Pode-se concluir que de uma forma geral, os alunos recorrem mais vezes às representações numéricas e analíticas. Porém, os mesmos tentaram recorrer ao longo de resolução de tarefas aos vários tipos de representações, em especial nos problemas com um grau mais elevado de complexidade. As conexões entre estas representações permitiram ao grupo em várias situações, obter múltiplas perspectivas do problema, tal como refere Ponte *et al.* (2007), chegando com maior facilidade às soluções do problema. Os alunos que sabem construir estas conexões conseguem compreender com maior profundidade os conceitos matemáticos e ver a Matemática como um todo integrado (Wu, 2008).

6.4. Dificuldades manifestadas

As maiores dificuldades apresentadas pelos alunos devem-se à falta de integração dos conceitos estudados, de construção de conexões entre diversos tópicos matemáticos incluindo as várias representações.

No início do estudo das sucessões as dificuldades manifestadas por alguns alunos do grupo incidiram no relacionamento entre a ordem e o termo da sucessão, o que dificultou a passagem para a representação analítica. Estas dificuldades foram superadas através da comunicação dentro do grupo. Tal como refere Ponte *et al*. (1997), a comunicação entre os próprios alunos foi um aspecto que contribuiu para o estabelecimento de conexões, facilitando assim a ultrapassagem das dificuldades.

No entanto verificam-se outras dificuldades manifestadas pelos alunos do grupo. Estas dificuldades são reveladas na transição de uma representação para a outra, o que está de acordo com Athanasios *et al.* (2006). Na realização da Tarefa 1, os alunos manifestaram dificuldades em passar da representação analítica para a gráfica, superando-as através da discussão em grande grupo, ouvindo os raciocínios dos colegas e estabelecendo conexões com os conceitos já estudados. Esta dificuldade não se manifestou em mais nenhuma das tarefas realizadas a seguir.

As maiores dificuldades que os alunos apresentaram foram na passagem da representação verbal para uma generalização simbólica, dificuldade manifestada devido ao constrangimento no estabelecimento de conexões entre a representação numérica e analítica, encontrado pelos alunos. A conexão entre a representação numérica e a analítica foi uma das dificuldades mais evidentes com que se confrontou o aluno João. Esta dificuldade deve-se à falta de conexões entre várias representações. A construção de conhecimento deve ser feita estabelecendo conexões entre representações, assim como refere Mwakapenda (2008), o que não se verificou no caso do João, aluno que evitava o apelo às outras representações, limitando-se à representação numérica. O grupo tentou em várias etapas ajudar o João para superar as dificuldades, recorrendo à representação verbal, geométrica ou gráfica.

No estudo da monotonia das sucessões, os alunos encontram também algumas dificuldades em estabelecer conexões entre a representação numérica e analítica. Para superarem estas dificuldades, os alunos recorrem á calculadora. Se no início do estudo das sucessões os alunos revelaram mais dificuldades na construção das conexões, com a passagem do tempo e devido à uma boa interacção entre os alunos do grupo, estas dificuldades começaram a diminuir.

Outra dificuldade observada foi na Tarefa 2 onde os alunos passaram da representação analítica para um dado contexto. Esta dificuldade deve-se à falta de conexões que os alunos deveriam estabelecer não só entre os conceitos matemáticos, mas também entre a matemática e o contexto real, entre a matemática e outras ciências, assim como acentua o Afonso e Nunes (2005a).

Algumas dificuldades apresentadas pelos alunos foram encontradas na definição das sucessões por recorrência, ou seja na notação simbólica dos termos anteriores quando se fixa um dado termo, dificuldade que foi ultrapassada recorrendo à conexão com outros problemas resolvidos que envolviam estas notações, tal como refere o Bruner (1975) que envolviam estas notações, pela análise das conjecturas elaboradas, discussão em grupo e também apelando ao apoio do professor.

Algumas dificuldades reveladas pelo grupo incidiram na comunicação matemática. Os alunos não conseguem justificar correctamente e explicar com rigor os seus raciocínios. No caso da Tarefa 7 verificou-se uma dificuldade em passar da representação geométrica para a analítica, o que foi superada devido à construção de conexões entre conceitos já estudados elaboradas pelo grupo, e também devido a uma boa interacção entre os elementos do grupo.

As dificuldades apresentadas pelos alunos no estabelecimento de conexões entre tópicos matemáticos incluindo o uso das diferentes representações e o estabelecimento de conexões entre estas, sugere a necessidade de implementar na sala de aula tarefas de natureza diversificada que envolvem várias representações e que possibilitam o estabelecimento de conexões entre elas. É importante também fomentar tarefas que englobam vários conceitos matemáticos e conteúdos estudados que permitem a integração dos conceitos e processos na construção de conexões.

Durante a realização deste estudo, uma das dificuldades que senti recai sobre o tempo limitado que tive à disposição para o realizar. Outra dificuldade enfrentada foi durante a revisão de literatura devido à existência de poucos estudos empíricos realizados sobre este tema. Na definição da problemática deste estudo tive que ter em consideração a subunidade que ia leccionar e as orientações curriculares para este ano de escolaridade. A escolha da subunidade para leccionar também foi influenciada pelo horário dos testes intermédios da turma. O processo da análise de dados não foi tão fácil de organizar, devido às questões da problemática do estudo que são interligadas. Para superar estas dificuldades analisei o trabalho do grupo para cada tarefa em parte e no final da cada análise, tentei responder às questões do estudo. Na reflexão final sobre os resultados obtidos, senti dificuldade em dar resposta a cada questão do estudo em separado, uma vez que todas estão interligadas.

Conversando com alguns alunos da turma e com os alunos do grupo, que foi objecto do meu estudo, fiquei com ideia que os mesmos gostaram desta experiência. Consideraram as tarefas trabalhadas nas aulas interessantes e afirmam que aprenderam muito durante a realização das mesmas, entre elas referem a Tarefa 2, Tarefa 3 e a

Tarefa 7. O trabalho em grupo, afirmam os alunos, levou-os a detectar erros nos raciocínios e escolher a estratégia mais apropriada a uma determinada situação.

A realização deste trabalho constitui, para mim, um momento de aprendizagem. Pela primeira vez na qualidade de investigadora, tive oportunidade de analisar os resultados obtidos, procurando dar resposta às questões que formulei referente à problemática do estudo e sentir as dificuldades do processo de investigação.

Como já referi no início deste documento, na minha actividade profissional no meu país de origem, não dei importância às conexões, e para mim este tema era pouco habitual. O programa era de tal forma construído há 11 anos, que não tinha referência a esta capacidade transversal. Passando por várias etapas, na realização deste estudo, percebi a importância deste tema transversal. Fiquei impressionada com algumas conexões estabelecidas por vários alunos nas actividades que realizaram. Verifiquei que estas conexões na verdade permitiram aos alunos explorar, conjecturar e descobrir processos de resolução de problemas. As discussões entre os alunos, no processo de resolução das tarefas, permitiram-me perceber que estabelecendo conexões com conceitos estudados, os alunos estavam a aprender pela própria actividade conceitos novos, o que me motivou para continuar a desenvolver este trabalho.

A realização deste estudo deu-me forças para tentar mudar as minhas antigas concepções em relação à estrutura da aula e às tarefas a implementar nas aulas. Tenho pela frente um trabalho de reflexão sobre as minhas antigas aulas e selecção dos bons momentos a implementar nas aulas que irei realizar. Com a análise de dados, aprendi que cada aluno em parte tem a sua própria maneira de pensar e tem de se dar valor aos raciocínios de cada um, sem ignorar as resoluções menos comuns que, por vezes, são as mais importantes. As produções de cada aluno podem fornecer informação importante sobre o modo de pensar de cada aluno, as dificuldades que manifesta e como poderia ser ajudado para as ultrapassar. Aprendi com este trabalho que a aprendizagem na sala de aula tem maior eficácia se o professor der uma maior importância aos raciocínios dos alunos. A aula deve ser orientada, pela actividade que os alunos desenvolvem, não prevalecendo a lógica do professor. Deste modo, as aprendizagens realizadas pelos alunos serão essenciais para os tornar capazes de enfrentar novos problemas, que vão certamente encontrar futuramente.

Para futuros estudos que abordem o tema das conexões, tenho algumas sugestões. Uma delas incide sobre o estudo das conexões e a importância destas na aprendizagem das progressões aritméticas e geométricas e também dos limites de sucessões, onde a matéria é mais abstracta e as conexões podem ser ainda mais ricas. Outras sugestões para continuação deste estudo recaiem sobre a importância das conexões não entre os tópicos matemáticos, mas entre a matemática e a vida real ou entre a matemática e outras ciências, na aprendizagem das sucessões. Seria interessante continuar este estudo, evidenciando as conexões com a História da Matemática tanto na aprendizagem das sucessões, como nas outras unidades temáticas do ensino Secundário e Básico. Seria igualmente pertinente que alguém continuasse este estudo evidenciando a importância das conexões no ensino Universitário, por exemplo no estudo da Teoria dos números, Geometria, Análise Matemática. Outras abordagens metodológicas podem também ser perspectivadas. Por exemplo, o desenvolvimento de um estudo realizado por vários professores de diversas escolas. Propor ao longo das actividades na sala de aula um leque diversificado de problemas. Implementar estes problemas em várias escolas no mesmo ano de escolaridade e fazer uma análise de várias resoluções que evidencie o estabelecimento de vários tipos de conexões. Entre estes problemas pode ser incluído o estudo dos vários números pitagóricos ou outros assuntos ligados aos conteúdos estudados no Ensino Básico e Ensino Secundário.

Referências

Afonso, P., & Nunes, S. M. (2005a). *Dos Problemas aos Conceitos – Um Exemplo de Conexões Matemáticas*. ProfMat 2005.

Afonso, P., & Nunes, S. M. (2005b). *Sessão prática nº 34: Conexões matemáticas.* ProfMat 2005

Abrantes, P. (1985). *Planificação no ensino da matemática*. Texto de apoio à disciplina de metodologia da Matemática. Lisboa: Departamento de Educação da Universidade de Lisboa.

Afonso, P. (2008). *O mundo mágico das conexões matemáticas.* Castelo Branco: Edições, Instituto Politécnico de Castelo Branco. Acedido em 2 Abril, 2010, de http://recreamat.blogs.sapo.pt/12510.html

Apostol, T. M. (2000). *A História de Pi* (Projecto Matemática em Acção, Trad.). Lisboa: CMAF-UL. (Obra original publicada em 1990).

Athanasios, G., Iliada, E., & Nikos, M. (2006). *Are registers of representation and problem solving processes on functions compartimentalized in students' thinking? Revista Latinoamericana de Investigação en Matemática Educativa, número especial Comité Latinoamericano de Matemática Educativa* (pp.197-224). México: Universidad Autonoma del Estado de México.

Bruner, J. S. (1975). *Uma nova teoria de aprendizagem* (3ª ed.). (N. L. Ribeiro, Trad.). Rio de Janeiro: Bloch Editores S.A. (Obra original publicada em 1966).

(2009). *Dicionário da Língua Portuguesa.* Porto: Porto Editora. Especialistas em dicionários.

Gomes, F., Viegas, C., & Lima, Y. (2008). *X∃QMAT, Matemática A 11.ºAno* (Volume 2). Lisboa: Texto Editores, LDA.

Jorge, A.M., Alves, C.B., Fonseca, G., & Barbedo, J. (2004). *Infinito 11 A* (Parte 3). Porto: Areal Editores.

Ministério da Educação (2001). *Currículo nacional do ensino básico: Competências essenciais*. Lisboa: DEB.

Ministério da Educação (1990). *Programa do 1.ºciclo do ensino básico.* Lisboa: DGEBS.

Ministério da Educação (1991a). *Programa de Matemática – Plano de Organização do*

Ensino-Aprendizagem – 2.º Ciclo do Ensino Básico. Lisboa: DGEBS.

Ministério da Educação (1991b). *Programa de Matemática – Plano de Organização do Ensino-Aprendizagem – 3.º Ciclo do Ensino Básico*. Lisboa: DGEBS.

Mwakapenda, W. (2008). *South African Journal of Education.Vol. 28:189-202.* Easa: Copyright.

NCTM (1994). *Normas profissionais para o ensino da matemática.* Lisboa: IIE e APM.

Oliveira, M. (2009). *Aplicações computacionais dinâmicas*. Acedido em 19 Abril, 2009, de www.matematicadinamica.com.

NCTM (2006). *Navigating through Mathematical Connections in Grades 9-12.* Reston: Autor.

NCTM (2008). *Princípios e normas para a Matemática Escolar* (2ª ed.). (M. Melo, Trad.). Lisboa: APM. (Obra original em inglês, publicada em 2000).

NCTM (2009). *Focus in High School Mathematics: Reasoning and Sense Making. Chapter 6.* 41-44.

Ponte, J. P., Serrazina, L., Guimarães, H. M., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, H., Menezes, L., Martins, M. E., & Oliveira, P. A. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação - DGIDC.

Ponte, J. P., & Serrazina, L. (2009). *O Novo Programa de Matemática: Uma oportunidade de mudança. Educação e Matemática, 105,* 2-6.

Ponte, J. P. (2009). *O novo programa de matemática como oportunidade de mudança para os professores do Ensino básico.* Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In Grupo de Trabalho de Investigação (GTI). *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp.11-34) (1ª ed.). Lisboa: APM.

Ponte, J. P., Boavida, A. M., Graça, M., & Abrantes, P. (1997). *Didáctica da Matemática*. Lisboa: Ministério de Educação. Departamento do Ensino Secundário.

Pólya, G. (1975). *A arte de resolver problemas*. Rio de Janeiro: Editora Interciência.

Rider, R. L. (2004). *The effect of multi-representational methods on students' Knowledge of function concepts in developmental college mathematics.* (tese de doutoramento, North Carolina State University).

Silva, J. C., Fonseca, M. G., Martins, A. A., Fonseca, C. M., & Lopes, I. M. (2002a). *Programa de Matemática do Ensino Secundário. Matemática A 10ºAno. Cursos Científico-Humanísticos de Ciências e Tecnologias e de Ciências Socioeconómicas.* Lisboa: Ministério da Educação – Departamento do Ensino Secundário.

Silva, J. C., Fonseca, M. G., Martins, A. A., Fonseca, C. M., & Lopes, I. M. (2002b). *Programa de Matemática do Ensino Secundário. Matemática A 11.º Ano. Cursos Científico-Humanísticos de Ciências e Tecnologias e de Ciências Socioeconómicas.* Lisboa: Ministério da Educação – Departamento do Ensino Secundário.

Schultz, J. E. & Waters, M. S. (2000). *Concern has been growing about the role of representations in teaching mathematics. Discuss with your colleagues.* (Vol. 93, 6, pp.448-453) . Easa: Copyright.

Schoenfeld, A. (1996). Porquê toda esta agitação acerca da resolução de problemas? In P. Abrantes, L. C, Leal, & J.P. Ponte (Eds.), *Investigar para aprender matemática* (pp.61-72). Lisboa: APM e Projecto MPT. (Artigo originalmente publicado em 1991 na revista ZDM).

Vale, I., & Pimentel, T. (2005). *Padrões: um tema transversal do currículo. Educação e Matemática*, *85*, 14-20.

Wu, H. (2008) *The Mathematics K-12 Teachers Need to Know.* Acedido em 30 Janeiro, 2010, de http://math.berkeley.edu/~wu/Schoolmathematics1.pdf

Wikipédia, *Representação* (*filosofia).* Acedido em 5 Abril, 2010, de http://pt.wikipedia.org/wiki/Representação_(filosofia) .

Wikipédia, *Representação* (*matemática).* Acedido em 5 Abril, 2010, de http://pt.wikipedia.org/wiki/Representação_(matemática) .

Yerushalmy, M. (2000). *Understanding teachers' understanding of algebra taught With the support of graphing technology.* Israel: Faculty of Education, University of Haifa. Final research report. Submitted to the Spencer Foundation Small Research Grants.

Bibliografia consultada

Aubyn, A. S., Figueiredo, M. C., Loura, L., Ribeiro, L., & Viegas, F. (2004). *Sucessões*. Acedido em 12 Abril, 2010, de http://preprint.math.ist.utl.pt/files/ppgmutlsucessoes.pdf.

Bernardes, A., Loureiro, C., Viana, J. P., & Bastos, R. (2009). *Matemática 11. Sucessões.* Porto: Edições Contraponto.

Branco, N.C. (2008). *O estudo de padrões e regularidades no desenvolvimento do pensamento algébrico* (tese de mestrado, Universidade de Lisboa).

Carvalho, P. C., & Carvalho, J. C. (2006). *Preparar os Testes. 11.º Ano*. Porto: Areal Editores.

Campos, F. J. (1985). *Introdução à Análise Matemática*. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

Galitchii, M. L., Moscovici, M. M., & Svartburd, S. I. (1990). *Studierea aprofundata a cursului de álgebra si analisa matemática* (F. Vascan & V. Sucevan, Trad.). Chisinau: Lumina. (Obra original em russo, publicada em 1986).

Guerreiro, L. R. (2009). *O papel das representações algébricas na aprendizagem das funções.* (tese de mestrado, Universidade de Lisboa).

Oliveira, H., & Almeida, A. C. (2009). *O processo de génese instrumental no estudo de Funções racionais no 11.ºano, com recurso à calculadora gráfica.* Documento não publicado.

Pogorelov, A. V. (1991). *Geometria. Manual pentru clasele 7-11 ale scolii medii* (I. Goian & I. Chitoroaga, Trad.). Chisinau: Lumina. (Obra original em russo, publicada em 1990).

Sá, A., & Louro, B. (2003). *Análise Matemática I. Teoria e exercícios*. Acedido em 12 Março, 2010, de http://www.mat.uc.pt/~alma/aulas/matematica2/sebentas/am1.pdf.

Anexos

Escola Secundária Vergílio Ferreira

Ficha de trabalho de Matemática A – **11.º**

Trabalho de grupo: **Sucessões Reais. Definição. Termo geral. Representação gráfica.**

14 de Abril de 2010 Nome: ___________________________________

Tarefa 1 [1)]

UM POUCO DE HISTÓRIA

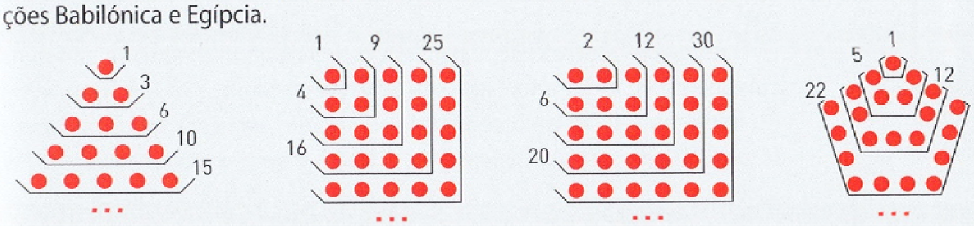
Números Pitagóricos

Desde as civilizações mais remotas que o Homem procedeu a contagens, elaborou listas, ordenou números e quantidades.

Existem vestígios de tabelas e problemas envolvendo a ordenação, contagem e determinação de elementos de uma sequência de números, que nos foram legados pelas civilizações Babilónica e Egípcia.

Na Grécia Antiga, a Escola Pitagórica desenvolveu particularmente o estudo dos números e criou interessantes sucessões numéricas, partindo de formas geométricas simples.

Assim nasceram os números triangulares, quadrados, rectangulares, pentagonais, hexagonais, etc.



Analisa a seguinte sequência de números que correspondem ao número de bolas de cada figura e a que na Grécia Antiga chamavam ***números rectangulares***:

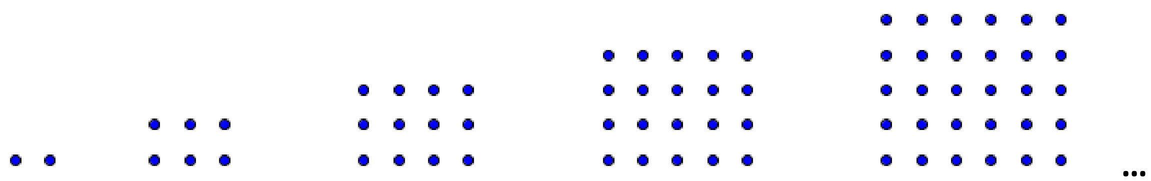


Fig.1 Fig.2 Fig.3 Fig.4 Fig.5 ...

1. Seguindo a mesma lógica de construção, quantas bolas terão a sexta e a sétima figura? Explica o teu raciocínio.

2.1. Associando a cada figura da sequência o número de bolas que a formam, regista estes valores na seguinte tabela e deduz uma expressão que te permita calcular o número de bolas de qualquer figura.

Ordem da Figura	**Número de bolas**
1	1 x 2 = __
2	2 x 3 = __
3	3 x 4 = __
4	
5	
6	
7	
8	
…	…
n	________
…	…

2.2. Existe algum número rectangular igual a 182? Em caso afirmativo, qual é a sua ordem? Explica o teu raciocínio.

3. Representa graficamente a correspondência que obtiveste na questão **2.1**.

4. Será que a expressão obtida representa uma função? Em caso afirmativo caracteriza essa função.

1) Adaptado de: **Jorge, A.M., Alves, C.B., Fonseca, G., & Barbedo, J. (2004).** ***Infinito 11 A, Parte 3*** **(p.11).**

Anexo 2

Escola Secundária Vergílio Ferreira

Ficha de trabalho de Matemática A – **11.º**

Trabalho de grupo: **Resolução de problemas.**

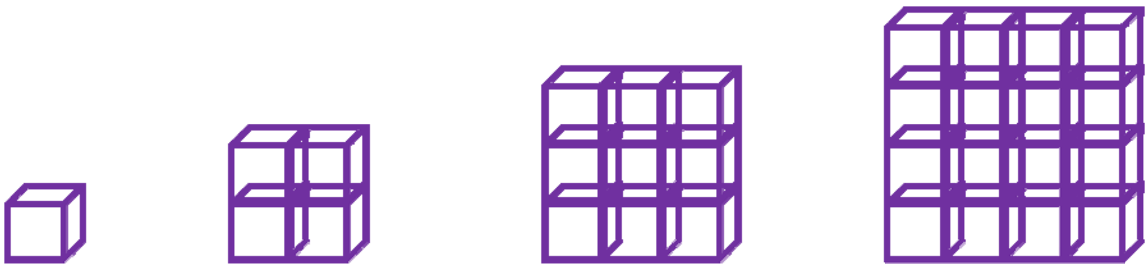
16 de Abril de 2010 Nome: ____________________________________

Tarefa 2

Versão I

1. Os Cubos

Observa a seguinte sequência de figuras. Quantos cubos terá a **n**-esima figura? Justifica a tua resposta.



...

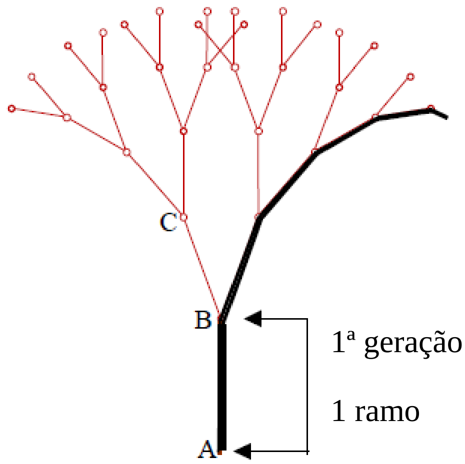
Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3 Fig. 4 ...

2. As algas

Algumas algas são excelentes indicadores de determinados problemas ecológicos. Por exemplo, quando se vê um tapete de alfaces-do-mar ou de algas azuis numa zona, isso é normalmente indicador de poluição, por excesso de produtos líquidos ou gasosos produzidos por indústrias ou resultante dos esgotos domésticos urbanos.

A alga representada no esquema tem ramificação dicotómica.

2.1. Quantos ramos terá a alga na **2ª**geração? E na **3ª** geração?



2.2. Quantos ramos terá a alga na geração de ordem ***n***?

3. Indica um termo geral das seguintes sucessões, considerando que se mantém a lei de formação. Se for possível encontra vários processos que te conduzam a outros termos gerais.

a) $\frac{\sqrt{3}}{2}, \ \frac{1}{2}, \ 0, \ -\frac{1}{2}, \ -\frac{\sqrt{3}}{,2}, \ -1, \ldots$

b) **1, -1, 1, -1, 1, -1, …**

c) **0, 0, 0, 0, …**

4. Constrói um problema (num contexto à tua escolha) cuja resolução te conduz à uma sucessão de termo geral **5n**.

Escola Secundária Vergílio Ferreira

Ficha de trabalho de Matemática A – **11.º**

Trabalho de grupo: **Resolução de problemas.**

16 de Abril de 2010 Nome: ___________________________________

Tarefa 2

<u>Versão II</u>

1. Observa a seguinte sequência de números que correspondem ao número de bolas de cada figura e a que na Grécia Antiga chamavam ***números quadrados***:

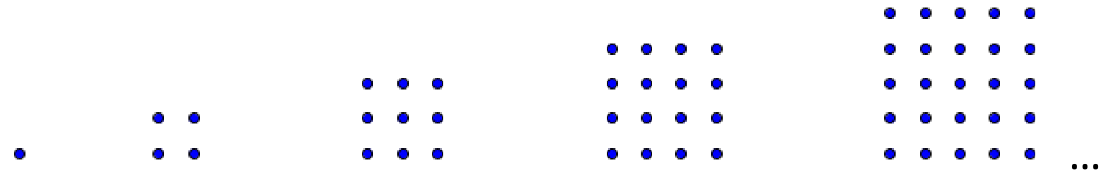


Fig.1 Fig.2 Fig.3 Fig.4 Fig.5 …

Seguindo a mesma lógica de construção, quantas bolas terá o número quadrado de ordem ***n***? Justifica a tua resposta.

2. Todos sabemos como é fácil a propagação de uma gripe; certo vírus propaga-se de tal forma que, em cada dia, cada pessoa contaminada contagia a primeira pessoa que encontra. Supondo que numa Escola Secundária apareceu, num certo dia, um aluno engripado, determina quantos alunos aparecerão contaminados passados 10 dias? E passado ***n*** dias?

3. Indica um termo geral das seguintes sucessões, considerando que se mantém a lei de formação. Se for possível encontra vários processos que te conduzam a outros termos gerais.

a) $\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -1$, … b) **1, -1, 1, -1, 1, -1, …**

c) **0, 0, 0, 0, …**

4. Constrói um problema (num contexto à tua escolha), cuja resolução te conduz à uma sucessão de termo geral **4n**.

Anexo 3

Escola Secundária Vergílio Ferreira

Ficha de trabalho de Matemática A – **11.º**

Trabalho de grupo: **Modos de definir sucessões**

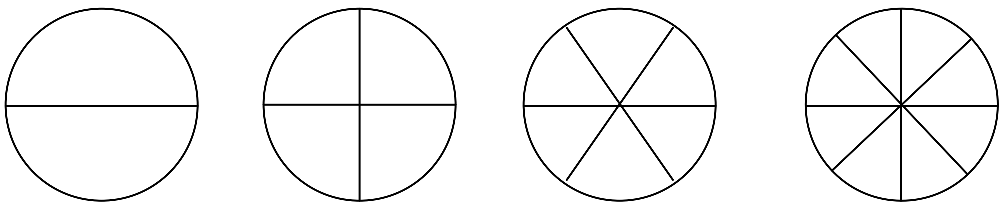
19 de Abril de 2010 Nome: ____________________________________

Tarefa 3 [1)]

1. Observa as seguintes sucessões:

(a_n): sucessão das **áreas** dos sectores circulares obtidos em função do número de diâmetros traçados.

Nota: O círculo tem a área 1, e é dividido pelos diâmetros em sectores circulares com a mesma área.



...

Fig.1 Fig.2 Fig.3 Fig.4 . . .

(t_n): sucessão dos **números triangulares**.

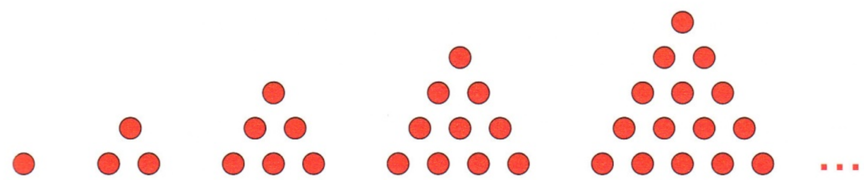


Fig.1 Fig.2 Fig.3 Fig.4 Fig.5 …

(b_n): sucessão de **Fibonacci**, matemático que viveu no séc. XIII, cuja termo geral apenas foi descoberto no séc. XVIII por Leonard Euler.

Esta sucessão teve origem no seguinte problema:

«Quantos casais de coelhos temos ao fim de cada mês, começando com um só casal, se todos os meses cada casal "produtivo"dá a luz um novo casal que por sua vez se torna "produtivo" ao fim de 2 meses?»

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$$

2. **2.1** Para cada uma das sucessões indica, se for possível, uma expressão analítica para o termo geral. Explica o teu raciocínio.

(a_n):

(t_n):

(b_n):

2.2 Escreve em linguagem matemática um processo que te permite obter vários termos das sucessões **(t_n)** e **(b_n)** relacionando-os com termos anteriores.

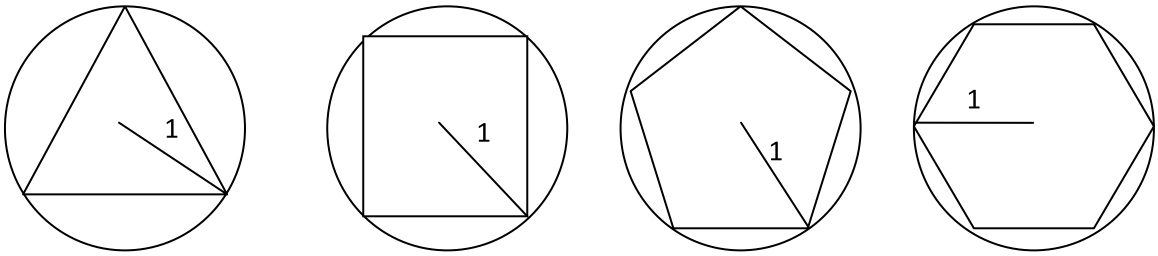
2.3 Constrói no teu caderno os gráficos para cada uma das sucessões.

1) Adaptado de: **Gomes, F., Viegas, C., & Lima, Y. (2008).** ***X∃QMAT, Matemática A 11.ºAno, Volume 2,*** **(p.189).**

Anexo 4

Tarefa 4

Observa a seguinte sequência de polígonos regulares inscritos numa circunferência de raio1.



...

Fig.1 Fig.2 Fig.3 Fig.4 ...

Sejam:

$\boldsymbol{l_1, l_2, l_3, \ldots, l_n, \ldots}$ as medidas dos comprimentos dos lados dos polígonos inscritos.

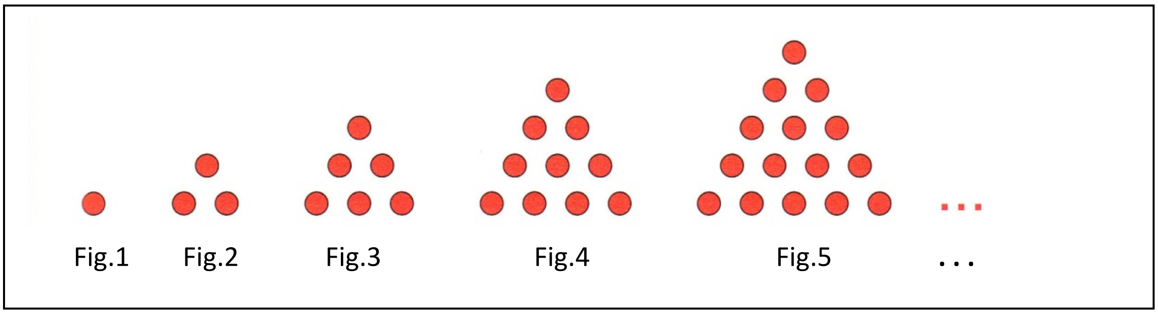
$\boldsymbol{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots}$as medidas das áreas dos polígonos inscritos.

A sucessão $(\boldsymbol{l_n})$***, será crescente ou decrescente?***

E a sucessão $(\boldsymbol{a_n})$***?***

Exemplo1

A sucessão dos números triangulares: $t_n = \frac{n^2+n}{2}$



Exemplo2

A sucessão (a_n) das áreas dos sectores circulares obtidos em dependência do número de diâmetros traçados: $a_n = \frac{1}{2n}$

(O círculo tem área 1 e é dividido pelos diâmetros em sectores circulares com a mesma área).

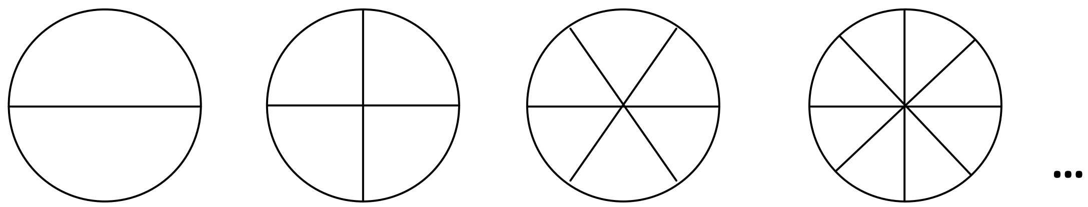


Fig.1 Fig.2 Fig.3 Fig.4 . . .

Exemplo3

Seja (u_n), uma sucessão cujo termo geral é:

$u_n=(n-100)^2$. Será monótona?

Anexo 5

	Escola Secundária Vergílio Ferreira
	Ficha de trabalho de Matemática A – **11.º**
	Trabalho para casa: **Sucessões monótonas.**
21 de Abril de 2010	Nome: ___________________________________

Tarefa 5 1)

Dá um exemplo de uma sucessão:

1º Monótona crescente, tal que a diferença entre qualquer termo e o anterior seja constante. Explica o teu raciocínio recorrendo a palavras, esquemas, cálculos ou símbolos.

2º Monótona crescente, tal que a diferença entre qualquer termo e o anterior seja cada vez maior. Explica o teu raciocínio recorrendo a palavras, esquemas, cálculos ou símbolos.

3º Monótona crescente, tal que a diferença entre qualquer termo e o anterior seja cada vez menor. Explica o teu raciocínio recorrendo a palavras, esquemas, cálculos ou símbolos.

Retirado de **Gomes, F., Viegas, C., & Lima, Y. (2008).** ***XΞQMAT, Matemática A 11.ºAno*** **(Volume 2)**

Escola Secundária Vergílio Ferreira

Ficha de trabalho de Matemática A – **11.º**

Trabalho individual: **Sucessões.**

22 de Abril de 2010 Nome: ____________________________________

Tarefa 6

Ditado matemático

(rápido e bem)

Tarefa 6

Ditado matemático

a) Indica o <u>termo geral</u> da sucessão:

1) Do número de dedos em ***n*** – mãos.

b) Diz se é <u>monótona</u> (crescente ou decrescente) ou <u>não monótona</u>.

a) **Indica o <u>termo geral</u> da sucessão:**

2) Do número de fósforos da figura de ordem ***n***?

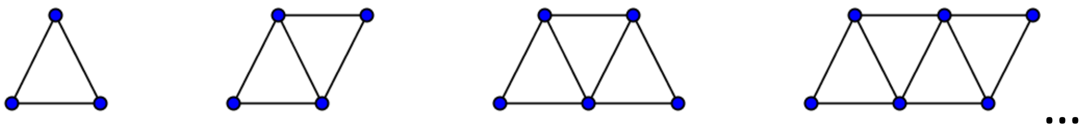


Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3 Fig. 4 ...

b) **Diz se é <u>monótona</u> (crescente ou decrescente) ou <u>não monótona</u>.**

a) **Indica o termo geral da sucessão:**

3) Dos números naturais?

b) **Diz se é <u>monótona</u> (crescente ou decrescente) ou <u>não monótona</u>.**

a) Indica o termo geral da sucessão:

4) Cujos quatro primeiros termos são:

$$\frac{1}{7}, \frac{1}{14}, \frac{1}{21}, \frac{1}{28}, \ldots$$

b) Diz se é <u>monótona</u> (crescente ou decrescente) ou <u>não monótona</u>.

a) Indica o termo geral da sucessão:

5) Dos números pares?

b) Diz se é <u>monótona</u> (crescente ou decrescente) ou <u>não monótona</u>.

a) **Indica o termo geral da sucessão:**

6) Cujos primeiros termos são

$$\mathbf{2, -2,\ 2, -2,\ 2, -2, \dots}$$

b) **Diz se é <u>monótona</u> (crescente ou decrescente) ou <u>não monótona</u>.**

c) **Dá um exemplo de uma sucessão:**

7) $\boldsymbol{a_n}$ - monótono crescente

8) $\boldsymbol{b_n}$ – monótona decrescente

9) $\boldsymbol{c_n}$ - não monótona

Utilize figuras, pontos, números, símbolos, gráficos, etc.

	Escola Secundária Vergílio Ferreira
	Ficha de trabalho de Matemática A – **11.º**
Trabalho de grupo: **Sucessões limitadas.**	
23 de Abril de 2010	Nome: ___________________________________

Tarefa 7

1. Observa a seguinte sequência de polígonos regulares inscritos numa circunferência de raio 1.

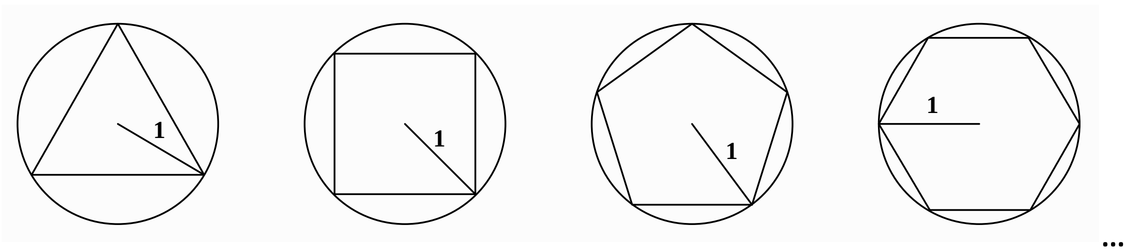


Fig.1 Fig.2 Fig.3 Fig.4 ...

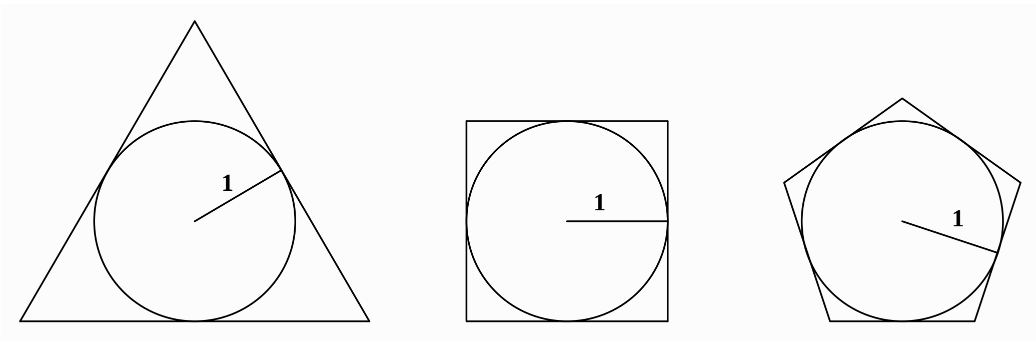
a) Calcula a área exacta de cada polígono. A solução para o triângulo equilátero é fornecida para te ajudar a generalizar a fórmula de cálculo da área para o polígono de ***n*** - lados. Apresenta o valor arredondado às décimas de milésimas na última coluna da tabela.

n	Valor exacto da área	Valor aproximado da área
3	$3\cos 30^0 \sin 30^0$	1.2990
4		
5		
6		

…		
10		
…		
60		
…		
180		
…		
n		

b) À medida que o ***n*** cresce de que valor se aproxima a área? Justifica a tua resposta.

2. Considera agora os polígonos regulares circunscritos a uma circunferência de raio igual a um, como mostra a figura.



...

Fig.1 Fig.2 Fig.3 …

a) Calcula a área exacta de cada polígono. A solução para o triângulo equilátero é fornecida para te ajudar a generalizar a fórmula de cálculo da área para o polígono de ***n*** - lados. Apresenta o valor arredondado às décimas de milésimas na última coluna da tabela.

n	**Valor exacto da área**	**Valor aproximado da área**
3	$\dfrac{3}{\tan 30^0}$	5.1962
4		
5		
6		
…		
10		
…		
60		
…		

180		
…		
n		

b) Para que valor se aproximam as áreas à medida que o ***n*** aumenta? De que forma as aproximações dos polígonos circunscritos diferem das aproximações obtidas no ponto 1 para os polígonos inscritos? Explica a tua resposta.

Adaptado de: Nacional Council of Teachers of Mathematics (2008), http:/illuminations.nctm.org

Anexo 8

Planificação da aula: 14 de Abril 2010

Ano de escolaridade: 11.º ano.

Tema: Sucessões Reais.

Subtema: Definição de sucessão de números reais. Termo geral. Representação gráfica.

Desenvolvimento do tema: Introdução do conceito de sucessão de números reais e do termo geral. Representação gráfica. Resolução de problemas.

Objectivos gerais:	• Abordar situações novas com interesse, espírito de iniciativa e criatividade; • Manifestar persistência na procura de soluções para uma situação nova; • Formular generalizações a partir de experiências; • Analisar situações da vida real, identificando modelos matemáticos que permitam a sua interpretação e resolução.
Objectivos específicos:	• Definir sucessão de números reais; • Compreender e utilizar a linguagem e nomenclatura própria das sucessões; • Determinar o termo geral da sucessão; • Calcular termos de uma sucessão definida pelo termo geral ou pela numeração de alguns termos; • Investigar se um dado valor faz parte do conjunto dos termos de uma sucessão; • Representar graficamente a sucessão.
Pré-requisitos:	• Capacidade de efectuar cálculos elementares; • Dominar o conceito de função.
Tarefa:	Tarefa de exploração: **Sucessões Reais. Definição. Termo geral. Representação gráfica.**
Produto esperado:	• Representação numérica de alguns termos da sucessão; • Tabela com valores registados; • Representação simbólica da sucessão; • Representação gráfica da sucessão; • Conclusões, justificações.
Metodologia de trabalho	• Trabalho em grupos de 4/5 alunos; • Discussão em grande grupo: o O aluno terá um papel de explorador o O professor terá um papel de orientador

Desenvolvimento da aula	0. Antes de iniciar a aula, organizar as mesas em seis agrupamentos e distribuir as fichas, os acetatos e os gravadores pelas mesas. **1º Momento – Organização.** • Organizar a turma em grupos de 4/5 alunos; • Iniciar a aula cumprimentando a turma e apresentando o sumário; • Explicar a metodologia de trabalho para a aula; • Anunciar o tempo disponível para realização da tarefa: 25 minutos. 5 Minutos. **2º Momento – Os alunos realizam a tarefa.** • Durante este momento, o professor deve circular pela sala, apoiando os alunos e recolhendo dados para a avaliação (como a participação no trabalho e o envolvimento no mesmo) e para o momento de discussão. • Passam as conclusões para o acetato. 25 Minutos. **3º Momento – Discussão da Tarefa.** • Os grupos vão apresentar os raciocínios através dos acetatos. • Promove a discussão em grande grupo. (Nesta fase o professor deverá ter um discurso interrogativo com o objectivo de conduzir os alunos às conclusões pretendidas). Pontos para discussão: **1ª questão da tarefa.** ❖ O professor pergunta à um dos grupos o que responderam à primeira questão (escolher um grupo que teve mais dificuldades). ❖ Perguntar se os outros grupos concordam. ❖ Pedir a um dos grupos para explicar como chegaram a conclusão. ❖ Perguntar se alguém adoptou outra estratégia. ❖ Pedir para explicarem o raciocínio. **2ª questão da tarefa.** ❖ Perguntar aos grupos qual é a expressão para o termo de ordem **n** (ouvir um grupo e perguntar se alguém descobriu outra expressão). ❖ Perguntar aos grupos quem quer explicar o 2.2. ❖ Perguntar se há outras estratégias. ❖ Analisar as estratégias elaboradas.

	3ª questão da tarefa. ❖ Analisar primeiro os gráficos que não foram bem construídos. ❖ Mostrar por último o gráfico correcto. Se nenhum grupo não chegar à representação gráfica correcta, orientar através de perguntas a discussão para alcançar o objectivo. ❖ Perguntar qual foi a resposta para a 4º questão? ❖ Perguntar qual é o domínio da expressão e qual é a designação de cada valor do domínio. ❖ Perguntar qual é o contradomínio da expressão e qual é o significado de cada valor. ❖ Sintetizar as conclusões dos alunos e introduzir o conceito de sucessão. ❖ Dar um exemplo de sucessão cujo termo geral não se pode encontrar, e perguntar se represente uma sucessão. ❖ Pedir aos alunos para fazerem registos nos seus cadernos. 25 Minutos. **4º Momento. Resolução de exercícios do livro.** ❖ Os alunos resolvem em grupo os exercícios: Ex. 1,2, 3 pág. 50 do manual. ❖ Pedir aos alunos para expor a resolução no quadro. ❖ Discutir em grande grupo várias estratégias elaboradas. 20 Minutos. **5º Momento** **0.** O professor sintetiza com os alunos os novos conceitos apreendidos. **1.** O professor indique as páginas 7 e 9 para estudar em casa e fazer uma síntese dos conceitos novos. **2.** O professor indique para trabalho de casa o Ex.1,2,3 pág.10 do manual. 10 Minutos.
Recursos	• Fichas de trabalho; • Acetatos e canetas; • Manual; • Câmara de filmar, gravadores.

Tempo previsto	90 minutos
Gestão do tempo	• 5 m – 1º Momento • 25 m – 2º Momento • 25 m – 3º Momento • 20 m – 4º Momento • 10 m – 5º Momento
Formas e momentos de avaliação	• Grelha de observação para o trabalho de grupo; • Os acetatos recolhidos.

Nota: A aula foi planificada para 85 minutos.

Anexo 9

Planificação da aula: 16 de Abril 2010

Ano de escolaridade: 11.º ano.

Tema: Sucessões Reais.

Subtema: Resolução de problemas.

Desenvolvimento do tema: Resolução de problemas de vários contextos.

Objectivos gerais:	• Exprimir e fundamentar as suas opiniões; • Abordar situações novas com interesse, espírito de iniciativa e criatividade; • Manifestar persistência na procura de soluções para uma situação nova; • Formular generalizações a partir de experiências; • Descobrir relações entre conceitos de Matemática e outras ciências; • Formular hipóteses e prever resultados; • Validar conjecturas.
Objectivos específicos:	• Resolver problemas de vários contextos; • Utilizar a linguagem e nomenclatura própria das sucessões; • Determinar o termo geral duma sucessão; • Identificar vários contextos para definir uma sucessão; • Identificar diferentes expressões para o termo geral duma sucessão.
Pré-requisitos:	• Capacidade de efectuar cálculos elementares; • Dominar o conceito de função; • Dominar o conceito de sucessão, termo geral.
Tarefa:	Tarefa de exploração: **Resolução de problemas.**
Produto esperado:	• Resolução dos problemas da ficha de trabalho. • Várias estratégias de resolução de problemas. • Explicitação das estratégias elaboradas. • Várias expressões para o termo geral duma determinada sucessão. • Apresentação de vários contextos para definir uma sucessão. • Apresentação das resoluções através do retroprojector.
Metodologia de trabalho	• Trabalho em grupos de 3/4 alunos;

Desenvolvimento da aula	• Discussão em grande grupo: o O aluno terá um papel de explorador o O professor terá um papel de orientador. 0. Antes de iniciar a aula, organizar as mesas em seis agrupamentos e distribuir as fichas e os gravadores pelas mesas. **1º Momento – Organização.** • Organizar a turma em grupos de 3/4 alunos; • Iniciar a aula cumprimentando a turma e apresentando o sumário; • Explicar a metodologia de trabalho para a aula; • Anunciar o tempo disponível para realização da tarefa: 30 Minutos. 10 Minutos. **2º Momento – Os alunos realizam a tarefa.** • Durante este momento, o professor deve circular pela sala, apoiando os alunos , recolhendo dados para a avaliação (como a participação no trabalho e o envolvimento no mesmo) e para o momento de discussão. • Os alunos passam as resoluções para as folhas de acetato. 30 Minutos. • **3º Momento – Discussão da Tarefa.** • Promove a discussão em grande grupo. (Nesta fase o professor deverá ter um discurso interrogativo com o objectivo de analisar várias estratégias de resolução). **Primeira questão** • Projectar a primeira tarefa da primeira versão. • Pedir aos grupos que explicitam as suas resoluções. • Projectar a primeira tarefa da segunda versão. • Pedir aos grupos que explicitam as suas resoluções. • Comparar as resoluções dos vários grupos que se referem à primeira versão. • Comparar as resoluções dos vários grupos que se referem à segunda versão. • Comparar as resoluções da primeira versão com a segunda. • Perguntar o que acham diferente, semelhante.

	<u>Segunda questão</u> • Projectar a <u>segunda tarefa</u> da <u>primeira versão</u>. • Pedir aos grupos que explicitam as suas resoluções. • Projectar a <u>segunda tarefa</u> da <u>segunda versão</u>. • Pedir aos grupos que explicitam as suas resoluções. • Comparar as resoluções dos vários grupos que se referem à <u>primeira versão</u>. • Comparar as resoluções dos vários grupos que se referem à <u>segunda versão</u>. • Comparar as resoluções da <u>primeira</u> versão com a <u>segunda</u>. • Perguntar o que acham diferente, semelhante. **<u>Terceira questão</u>** • Projectar a tarefa no quadro interactivo • Pedir aos grupos que tiveram estratégias diferentes que expõem as resoluções, explicando como chegaram ao termo geral? **<u>Quarta questão</u>** • Pedir aos grupos que apresentem o seu problema. • Discutir várias apresentações. 35 Minutos. **4º Momento** • O professor indique as páginas 11-13 para estudar em casa. • O professor indique para trabalho de casa: Ex.1,2,3,4 pág. 50-51 do manual. 10 Minutos.
Recursos	• Fichas de trabalho; • Folhas de acetato; • Calculadora gráfica; • Retroprojector; • Câmara de filmar, gravadores.
Tempo previsto	90 minutos
Gestão do tempo	• 10 m – 1º Momento

	• 30 m – 2º Momento • 35 m – 3º Momento • 10 m – 4º Momento
Formas e momentos de avaliação	• Grelha de observação para o trabalho de grupo; • Acetatos recolhidas com as conclusões de cada grupo; • Fichas recolhidas com o trabalho realizado na aula.

Nota: A aula foi planificada para 85 minutos.

Anexo 10

Planificação da aula: 19 de Abril 2010

Ano de escolaridade: 11.º ano.

Tema: Sucessões Reais.

Subtema: Modos de definir uma sucessão.

Desenvolvimento do tema: Definição das sucessões por recorrência, pelo termo geral e pelo gráfico (pontos isolados). As potencialidades da calculadora no estudo das sucessões. Resolução de problemas.

Objectivos gerais:	• Exprimir e fundamentar as suas opiniões; • Abordar situações novas com interesse, espírito de iniciativa e criatividade; • Formular generalizações a partir de experiências; • Seleccionar estratégias de resolução de problemas; • Descobrir relações entre conceitos de Matemática e outras ciências; • Formular hipóteses e prever resultados; • Validar conjecturas; • Fazer raciocínios demonstrativos usando métodos adequados.
Objectivos específicos:	• Estudar sucessões definidas de diferentes formas; • Utilizar a linguagem e nomenclatura própria das sucessões; • Determinar o termo geral da sucessão; • Definir uma sucessão por recorrência; • Utilizar a calculadora para o estudo das sucessões.
Pré-requisitos:	• Capacidade de efectuar cálculos elementares; • Dominar o conceito de função; • Dominar o conceito de sucessão.
Tarefa:	Tarefa de exploração: **Modos de definir uma sucessão.**
Produto esperado:	• Representação duma sucessão, por recorrência; • Representação duma sucessão, pelo termo geral; • Representação gráfica da sucessão; • Diversas estratégias elaboradas para definir as sucessões.

Metodologia de trabalho **Desenvolvimento da aula**	• Trabalho em grupos de 3/4 alunos; • Discussão em grande grupo: o O aluno terá um papel de explorador o O professor terá um papel de orientador. 0. Antes de iniciar a aula, organizar as mesas em seis agrupamentos e distribuir as fichas e os gravadores pelas mesas. **1º Momento – Organização.** • Organizar a turma em grupos de 3/4 alunos; • Iniciar a aula cumprimentando a turma e apresentando o sumário; • Explicar a metodologia de trabalho para a aula; • Anunciar o tempo disponível para realização da tarefa: 30 minutos. 5 Minutos. **2º Momento – Os alunos realizam a tarefa.** • Durante este momento, o professor deve circular pela sala, apoiando os alunos e recolhendo dados para a avaliação (como a participação no trabalho e o envolvimento no mesmo). • O professor toma nota das resoluções dos grupos para uma melhor gestão da discussão. 30 Minutos. **3º Momento – Discussão da Tarefa.** • Recolha as fichas com as produções dos alunos (uma ficha por grupo). • Projecta a tarefa no quadro interactivo. • Promove a discussão em grande grupo. (Nesta fase o professor deverá ter um discurso interrogativo com o objectivo de analisar várias estratégias de resolução e conduzir os alunos às conclusões pretendidas). Pontos para discussão: **1ª Questão da tarefa.** ❖ O professor pede à alguns representantes dos grupos para irem ao quadro e justificar as respostas (escolher grupos com menor desempenho). ❖ Perguntar se os outros grupos concordam. ❖ Perguntar se alguém adoptou outra estratégia. ❖ Se sim, pedir para explicarem o raciocínio.

	2ª Questão da tarefa. ❖ Depois de acabarem de completar esta questão da tarefa pedir à alguns representantes dos grupos que ainda não foram interrogados, para irem ao quadro e completar no quadro interactivo a ficha. Pedir justificações acerca da estratégia escolhida para cada passo. ❖ Perguntar aos grupos se concordam e se obtiveram os mesmos resultados. ❖ Analisar as estratégias elaboradas. **3ª Questão da tarefa.** ❖ Pedir à um representante do grupo que teve maior sucesso nesta tarefa para explicar a estratégia elaborada para resolver a situação. ❖ Discutir em grande grupo várias estratégias elaboradas. ❖ Os alunos registam nos cadernos. **4ª Questão da tarefa.** ❖ Ouvir opiniões dos vários grupos. ❖ Tentar ajudar os alunos chegarem ao termo geral, lançando perguntas. ❖ O professor explique: Nem sempre é fácil (ou possível) encontrar uma expressão analítica do termo geral de uma sucessão. Tal não significa, que não seja possível caracterizar a sucessão, ou seja, determinar o valor de qualquer termo. Foi o que certamente fizeram, e o processo que utilizaram, chama-se definição por recorrência. ❖ O professor pede aos alunos para consultarem a pág.16 do manual sobre sucessões definidas por recorrência. **5ª Questão da tarefa.** ❖ Informar os alunos que para realizarem esta questão devem consultar a ficha distribuída no início da aula sobre a utilização da calculadora. ❖ Projecta no quadro o software com a simulação da calculadora. ___________ 35 Minutos. **4º Momento** **1.** O professor sintetiza com os alunos os novos conceitos apreendidos. **2.** O professor indique as páginas 14-16 para estudar em casa e fazer uma síntese dos conceitos novos. **3.** O professor indique para trabalho de casa a actividade da pág.14 do manual, Ex.1,2,3 da pág. 16 do manual. ___________ 10 Minutos.

Recursos	• Fichas de trabalho; • Manual; • Ficha informativa sobre o uso da calculadora; • Câmara de filmar, gravadores.
Tempo previsto	90 minutos
Gestão do tempo	• 5 m – 1º Momento • 30 m – 2º Momento • 35 m – 3º Momento • 10 m – 4º Momento
Formas e momentos de avaliação	• Grelha de observação para o trabalho de grupo; • Fichas recolhidas com o trabalho realizado na aula.

Nota: A aula foi planificada para 80 minutos.

Anexo 11

Planificação da aula: 21 de Abril 2010

Ano de escolaridade: 11.º ano.

Tema: Sucessões Reais.

Subtema: Sucessões monótonas.

Desenvolvimento do tema: Sucessão crescente, decrescente.

Objectivos gerais:	• Exprimir e fundamentar as suas opiniões; • Manifestar persistência na procura de soluções para uma situação nova; • Formular generalizações a partir de experiências; • Seleccionar estratégias de resolução de problemas; • Descobrir relações entre conceitos de Matemática e outras ciências; • Validar conjecturas; • Fazer raciocínios demonstrativos usando métodos adequados.
Objectivos específicos:	• Estudar monotonia duma sucessão; • Saber demonstrar analiticamente se uma sucessão é monótona; • Construir sucessões monótonas; • Utilizar a linguagem e nomenclatura própria das sucessões; • Utilizar a calculadora para o estudo das sucessões.
Pré-requisitos:	• Capacidade de efectuar cálculos elementares; • Dominar o conceito de função; • Dominar o conceito de sucessão, termo geral; • Capacidade de definir sucessões de várias formas.
Tarefa:	Tarefa de exploração: **Sucessões monótonas.**
Produto esperado:	• Conclusões sobre a monotonia das sucessões pela intuição ou pelo método de enumeração dos termos. • Demonstrações utilizando processos analíticos para verificar a monotonia das sucessões. • Realização da ficha de trabalho com construção de sucessões.

Metodologia de trabalho **Desenvolvimento da aula**	• Trabalho a pares; • Discussão em grande grupo: o O aluno terá um papel de explorador o O professor terá um papel de orientador. **1º Momento – Organização.** • Organizar a turma; • Iniciar a aula cumprimentando a turma e apresentando o sumário; • Explicar a metodologia de trabalho para a aula; __________ 5 Minutos. **2º Momento** • O professor projecta no quadro a ficha informativa. • Promove a discussão que conduzirá aos conceitos de sucessão crescente, decrescente. • Pedir sempre colaboração dos alunos. • Os alunos analisam os 3 exemplos de sucessão crescente, decrescente, não monótona. • O professor orienta os alunos a perceber que por intuição ou verificando alguns termos das sucessões não se pode concluir que a sucessão é ou não monótona. • O professor chama a atenção dos alunos para fazerem comparação com o caso de monotonia das funções. Pretende-se que seja escrito no quadro que no caso das funções temos: se $x> y \Rightarrow f(x)> f(y)$, $\forall x, y \in D_f$, então f – crescente; se $x> y \Rightarrow f(x) < f(y)$, $\forall x, y \in D_f$, então a função é decrescente. No caso das sucessões temos: Se $u_{n+1}>u_n$, $\forall n \in N$, então a sucessão é crescente, se $u_{n+1}<u_n$, $\forall n \in N$, então a sucessão é decrescente. • O professor explique que no caso das funções uma função f não é necessariamente crescente se $f(x+1) > f(x), \forall x \in D_f$, e não é necessariamente decrescente se $f(x+1) < f(x), \forall x \in D_f$, porque não se trata de domínio natural mas de domínio real. Dar exemplos recorrendo à função quadrática por exemplo. • O professor explique como se procede para verificar analiticamente se uma sucessão é ou não monótona. _____________ 30 Minutos.

	3º Momento • Distribui as fichas de trabalho à cada aluna. ______________ 5 Minutos. **4º Momento** • Os alunos realizam a tarefa. • Durante a actividade o professor circule pelas carteiras, observando o trabalho dos pares. ______________ 25 Minutos. **5º Momento** • O professor recolhe as fichas. ______________ 5 Minutos. **6º Momento** 1. Sintetizar com os alunos os novos conceitos apreendidos. 2. Indicar as páginas 17-22 para estudar em casa e fazer uma síntese dos conceitos novos. 3. Indicar para trabalho de casa a actividade da pág.22 do manual ou Ex.8-13 da pág. 16 do manual. ______________ 10 Minutos.
Recursos	• Ficha informativa para introduzir os novos conceitos; • Fichas de trabalho; • Manual; • Câmara de filmar, gravadores; • Calculadora.
Tempo previsto	90 minutos

Gestão do tempo	• 5 m – 1º Momento • 30 m – 2º Momento • 5 m – 3º Momento • 25 m – 4º Momento • 5 m – 5º Momento • 10 m – 6º Momento
Formas e momentos de avaliação	• Grelha de observação para o trabalho de grupo; • Fichas recolhidas com o trabalho realizado na aula.

Nota: A aula foi planificada para 80 minutos.

Anexo 12

Planificação da aula: 22 de Abril 2010

Ano de escolaridade: 11.º ano.

Tema: Sucessões Reais.

Subtema: Resolução de problemas sobre sucessões monótonas e não monótonas.

Desenvolvimento do tema: Resolução de problemas.

Objectivos gerais:	• Abordar situações novas com interesse, espírito de iniciativa e criatividade; • Manifestar persistência na procura de soluções para uma situação nova; • Formular generalizações a partir de experiências; • Analisar situações da vida real, identificando modelos matemáticos que permitam a sua interpretação e resolução.
Objectivos específicos:	• Desenvolver a capacidade de cálculo mental; • Compreender e utilizar a linguagem e nomenclatura própria das sucessões; • Determinar o termo geral da sucessão; • Calcular termos de uma sucessão definida pelo termo geral ou pela numeração de alguns termos; • Investigar se um dado valor faz parte do conjunto dos termos de uma sucessão; • Identificar sucessões monótonas e não monótonas. • Resolver problemas de diversos contextos.
Pré-requisitos:	• Capacidade de efectuar cálculos elementares; • Dominar o conceito de sucessão, termo geral, definição por recorrência; • Dominar os conceitos de monotonia duma sucessão.
Tarefa:	Ficha: **Ditado matemático.**
Produto esperado:	• Realização do ditado matemático. • Várias estratégias elaboradas na resolução de problemas do livro.
Metodologia de trabalho	• Trabalho individual; • Discussão em grande grupo para os problemas com diferentes estratégias de resolução.

Desenvolvimento da aula	0. Antes de iniciar a aula, o professor distribui folhas para realização do ditado. **1º Momento – Organização.** • Iniciar a aula cumprimentando a turma e apresentando o sumário; • Explicar a metodologia de trabalho para a aula; • Anunciar o tempo disponível para realização do ditado: 20 minutos. 5 Minutos. **2º Momento – Os alunos realizam o ditado.** • Durante este momento, o professor projecta no quadro interactivo o ditado mostrando uma pergunta de cada vez. 20 Minutos. **3º Momento – Recolha das fichas com o ditado realizado** • Recolha as fichas com as produções dos alunos. 5 Minutos. **4º Momento- Resolução de problemas e exercícios do manual.** Prob. 8 pág. 51, Ex. 9 pág. 51, Prob. 14 (até ponto d.), pág. 52. ❖ O professor escreve no quadro o que será resolvido na aula; ❖ Os alunos resolvem individualmente os exercícios e os problemas do manual indicados pelo professor. ❖ Pedir aos alunos para expor a resolução no quadro. ❖ Discutir em grande grupo várias estratégias elaboradas. 45 Minutos. **5º Momento**. 1. Indicar as páginas 17- 22 para rever em casa. 2. Indicar para trabalho de casa Ex. 10, 11, 12, 13 pág.51 do manual. 5 Minutos.
Recursos	• Ficha de trabalho com o enunciado do ditado; • Folhas para realização do ditado (24 folhas);

	• Manual; • Câmara de filmar, gravadores.
Tempo previsto	90 minutos
Gestão do tempo	• 5 m – 1º Momento • 20 m – 2º Momento • 5 m – 3º Momento • 45 m – 4º Momento • 5 m – 5º Momento
Formas e momentos de avaliação	• Fichas recolhidas com o trabalho realizado durante o ditado.

Nota: A aula foi planificada para 80 minutos.

Anexo 13

Planificação da aula: 23 de Abril 2010

Ano de escolaridade: 11.º ano.

Tema: Sucessões Reais.

Subtema: Sucessões limitadas.

Desenvolvimento do tema: Definição da sucessão limitada. Majorantes , minorantes de sucessões limitadas. Sucessões monótonas e não monótonas limitadas.

Objectivos gerais:	• Exprimir e fundamentar as suas opiniões; • Manifestar persistência na procura de soluções para uma situação nova; • Formular generalizações a partir de experiências; • Seleccionar estratégias de resolução de problemas; • Descobrir relações entre conceitos de Matemática e outras ciências; • Formular hipóteses e prever resultados; • Validar conjecturas; • Fazer raciocínios demonstrativos usando métodos adequados.
Objectivos específicos:	• Estudar sucessões monótonas e não monótonas limitadas; • Introdução dos conceitos de majorantes e minorantes de sucessões; • Utilizar a linguagem e nomenclatura própria das sucessões; • Determinar o termo geral de uma sucessão.
Pré-requisitos:	• Capacidade de efectuar cálculos elementares; • Dominar o conceito de função; • Dominar o conceito de sucessão; • Dominar o conceito de sucessão monótona e não monótona.
Tarefa:	Ficha de trabalho : **Sucessões limitadas.**
Produto esperado:	• Realização da ficha de trabalho. • Cálculo do termo geral das sucessões relativas às áreas dos polígonos inscritos e circunscritos. • Conclusões do trabalho realizado.
Metodologia de trabalho	• Trabalho em grupos de 3/4 alunos; • Discussão em grande grupo: o O aluno terá um papel de explorador o O professor terá um papel de orientador.

Desenvolvimento da aula	0. Antes de iniciar a aula, organizar as mesas em seis agrupamentos e distribuir as fichas e os gravadores pelas mesas. Preparar o computador para ligação com o quadro interactivo. **1º Momento – Organização.** • Organizar a turma em grupos de 3/4 alunos; • Iniciar a aula cumprimentando a turma e apresentando o sumário; • Explicar a metodologia de trabalho para a aula; • Anunciar o tempo disponível para realização da tarefa: 30 minutos. 5 Minutos. **2º Momento – Os alunos realizam a tarefa.** • Durante este momento, o professor deve circular pela sala, apoiando os alunos e recolhendo dados para a avaliação (como a participação no trabalho e o envolvimento no mesmo). • Os alunos completam a tabela 1 e 2. • Os alunos deduzem o termo geral em cada tabela. • Os alunos registam as conclusões. 30 Minutos. **3º Momento – Discussão da Tarefa.** • Recolha as fichas com as produções dos alunos (uma ficha por grupo). • Projecta a tarefa no quadro interactivo. • Promove a discussão em grande grupo. (Nesta fase o professor deverá ter um discurso interrogativo com o objectivo de promover a explicitação das conclusões obtidas pelos alunos). Pontos para discussão: ❖ O professor pede a alguns representantes dos grupos para irem ao quadro e completarem a tabela. ❖ Perguntar aos outros grupos se obtiveram os mesmos resultados. ❖ Pedir explicitação da estratégia escolhida para calcular o termo geral. ❖ Analisar as estratégias elaboradas. ❖ Tentar ajudar os alunos definir o conceito de sucessão limitada e discutir quais das sucessões já estudadas são limitadas. ❖ O professor pede aos alunos para consultarem a pág.23, 25 do manual sobre sucessões limitadas.

	___________ 35 Minutos. **4º Momento** 1. O professor sintetiza com os alunos os novos conceitos apreendidos. 2. O professor indique as páginas 23-28 para estudar em casa e fazer uma síntese dos conceitos novos. 3. O professor indique para trabalho de casa a actividade da pág.29 do manual. _______________ 10 Minutos.
Recursos	• Fichas de trabalho; • Software do Excel. • Manual; • Câmara de filmar, gravadores.
Tempo previsto	90 minutos
Gestão do tempo	• 5 m – 1º Momento • 30 m – 2º Momento • 35 m – 3º Momento • 10 m – 4º Momento
Formas e momentos de avaliação	• Grelha de observação para o trabalho de grupo; • Fichas recolhidas com o trabalho realizado na aula.

Nota: A aula foi planificada para 80 Minutos.

Anexo 14

Acetato usado na aula correspondente à <u>Tarefa1</u>

Grupo____________________

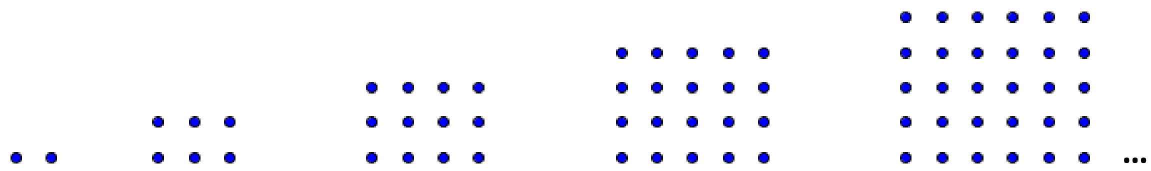


Fig.1 Fig.2 Fig.3 Fig.4 Fig.5 …

1. Seguindo a mesma lógica de construção, quantas bolas terão a sexta e a sétima figura? Explica o teu raciocínio.

2.

2.1. Associando a cada figura da sequência o número de bolas que a formam, regista estes valores na seguinte tabela e deduz uma expressão que te permita calcular o número de bolas de qualquer figura.

Ordem da Figura	**Número de bolas**
1	1 x 2 = __
2	2 x 3 = __
3	3 x 4 = __
4	
5	
6	
7	
8	
…	…
n	________
…	…

2.2. Existe algum número rectangular igual a 182? Em caso afirmativo, qual é a sua ordem? Explica o teu raciocínio.

Grupo_____________________

3. Representa graficamente a correspondência que obtiveste na questão **2.1**.

4. Será que a expressão obtida representa uma função? Em caso afirmativo caracteriza essa função.

Anexo 15

Acetato usado na aula correspondente à *Tarefa2*

Versão I

Grupo______

1.

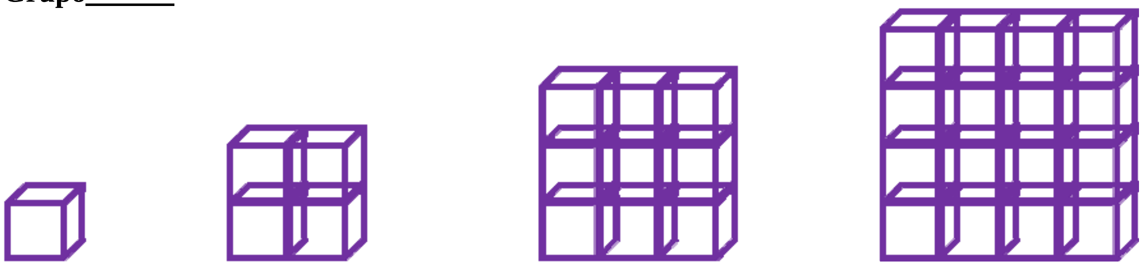
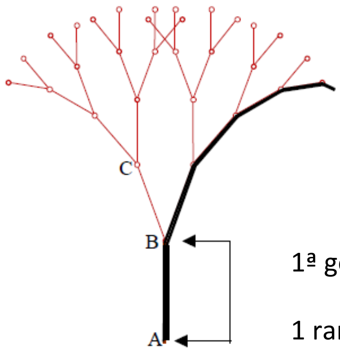


Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3 Fig. 4 …

…

2.



1ª geração

1 ramo

3. a) $\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2},\ 0,\ -\frac{1}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2},\ -1, \dots$ b) **1, -1, 1, -1, 1, …**

c) **0, 0, 0, 0, …**

4. Constrói um problema (num contexto à tua escolha) cuja resolução te conduz à uma sucessão de termo geral **5n.**

Versão II

Grupo______

0. Números quadrados

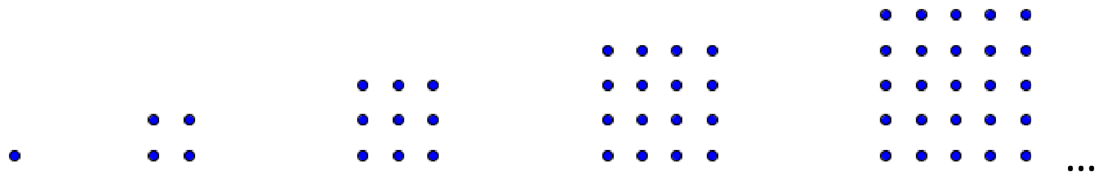


Fig.1 Fig.2 Fig.3 Fig.4 Fig.5 …

1. Propagação da gripe

2.

a) $\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -1, \ldots$ **b)** **1, -1, 1, -1, 1, …**

c) **0, 0, 0, 0, …**

4. Constrói um problema (num contexto à tua escolha), cuja resolução te conduz à uma sucessão de termo geral **4n**.

Anexo 16

Guião de observação para o trabalho de grupo

Grupo	Porta-voz	Empenho	Desenvolvimento do trabalho	Gestão do tempo	Liderança